

МОДЕЛЬ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КОНВЕКТИВНЫХ ЗОНАХ СОЛНЦА И ЗВЕЗД

LARGE-SCALE FLOW MODEL FOR SOLAR AND STELLAR CONVECTION ZONES

Л.Л. Кичатинов

Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, kit@iszf.irk.ru

L.L. Kitchatinov

Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, kit@iszf.irk.ru

Аннотация. В рамках гидродинамики средних полей создана модель крупномасштабных течений в конвективных зонах Солнца и подобных Солнцу звезд, обобщающая предшествующие модели дифференциального вращения с учетом зависимости течения от времени и его отклонения от осевой симметрии. Модель реализована в виде программы численных расчетов, в которой применяется спектральный метод разложения по сферическим функциям в комбинации с конечно-разностным дифференцированием второго порядка точности по времени и радиусу. Первые расчеты показали близкое соответствие осесимметричной части течения данным гелиосейсмологии о дифференциальном вращении и меридиональной циркуляции. Картина затухающих во времени неосесимметричных течений, рассчитанных в модели, находится в качественном согласии с наблюдениями волн Россби на Солнце. Сформулирована задача дальнейшего развития теории крупномасштабных течений.

Ключевые слова: Солнце, звезды, вращение, конвекция, турбулентность, численное моделирование.

Abstract. The paper presents a mean-field model for large-scale flows in convection zones of the Sun and solar-type stars. The model extends former differential rotation models by allowance for variations of the flow with time and its deviation from axial symmetry. The model is realized as a numerical code, which combines the spectral method of decomposition in spherical functions with second-order accurate finite-difference method in time and radius. First computations show close agreement of the axially symmetric part of the computed flow with helioseismological detections of differential rotation and meridional circulation. Patterns of the time-decaying non-axisymmetric flow computed with the model qualitatively agree with the Rossby waves observed on the Sun. The paper also formulates a problem for further development of the large-scale flow theory.

Keywords: Sun, stars, rotation, convection, turbulence, numerical methods.

ВВЕДЕНИЕ

На Солнце и подобных ему звездах имеются крупномасштабные течения, среди которых наиболее известны неоднородное (дифференциальное) вращение и меридиональная циркуляция. Имеется возрастание скорости вращения от полюсов к экватору приблизительно на 30 % и меридиональное течение от экватора к полюсам со скоростью ~ 10 м/с на поверхности Солнца. Крупномасштабные течения играют важнейшую роль в физике солнечной и звездной активности [Charbonneau, 2020; Karak, 2023; Charbonneau, Sokoloff, 2023].

Источником крупномасштабных течений, по всей вероятности, является турбулентная конвекция. На это прямо указывает гелиосейсмология, согласно которой области пространства, охваченные как дифференциальным вращением [Thompson et al., 1996; Schou et al., 1998], так и меридиональной циркуляцией [Rajaguru, Antia, 2015; Gizon et al., 2020], совпадают с зоной конвекции.

В теории крупномасштабных течений доминируют два дополняющих друг друга подхода. Большинство авторов применяют так называемое прямое численное моделирование. Из уравнений гидродинамики проводится численный расчет трехмерных зависящих от времени течений, включающих как

конвекцию, так и крупномасштабную составляющую. Последняя может быть выделена усреднением по времени. Воспроизведение наблюдений в рамках такого подхода подтвердило бы тот факт, что Солнце подчиняется фундаментальным уравнениям. Несмотря на впечатляющие успехи в этом направлении, соответствие наблюдениям все еще не достигнуто (см., например, обзоры [Hotta et al., 2023; Käpylä et al., 2023]).

Другой подход, получивший название теории средних полей, отличается очередностью усреднения и решения уравнений (см., например, [Rüdiger, 1989; Brandenburg et al., 2023]). Сначала проводится усреднение фундаментальных уравнений. Это дает уравнения для крупномасштабных полей. В уравнениях присутствуют вклады турбулентности, которые должны быть выражены через достаточно простые параметры турбулентности и усредненные крупномасштабные поля. В таком подходе с необходимостью используются приближенные методы теории турбулентности и не имеющие строгого обоснования предположения, но теория средних полей выясняет физику крупномасштабных течений.

Основанные на методе средних полей численные модели [Kitchatinov, Olemsko, 2011, 2012] воспроизводят результаты гелиосейсмологии по дифференциальному вращению и меридиональной цирку-

ляции и не противоречат наблюдаемым [Barnes, 2005; Balona, Abedigamba, 2016] зависимостям дифференциального вращения подобных Солнцу звезд от скорости вращения и эффективной температуры. Эти модели определяют крупномасштабные течения в конвективных оболочках звезд в предположении их стационарности и осевой симметрии. Имеются, впрочем, нестационарные модели крутильных колебаний [Pipin, Kosovichev, 2019, 2020].

Данная работа обобщает имеющиеся модели средних полей с учетом зависимостей крупномасштабного течения от времени и долготы. Целесообразность такого обобщения связана с наблюдениями на Солнце крупномасштабных вихревых течений [Löptien et al., 2018], а также с планируемым объединением моделей дифференциального вращения и звездного динамо, где зависимость от времени должна присутствовать. На звездах наблюдаются крутильные колебания большой амплитуды [Collier Cameron, Donati, 2002] и следует ожидать больших отклонений от осевой симметрии [Kitchatinov, 2022].

В разделе 1 дано описание модели. Метод численного решения уравнений модели изложен в разделе 2. Результаты первых приложений к Солнцу приведены в разделе 3. В Заключение сформулированы основные выводы и задачи на будущее.

1. МОДЕЛЬ

1.1. Основные уравнения и приближения

Модель ограничивается случаем медленного вращения, когда центробежное ускорение $R_*\Omega^2$ мало по сравнению с ускорением свободного падения g , и можно пренебречь отклонением в распределениях плотности ρ , температуры T и давления $P = (c_p - c_v)\rho T$ от сферической симметрии (Ω — угловая скорость, R_* — радиус звезды, c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме; принято уравнение состояния идеального газа). Предположение о сферической симметрии, однако, не относится к распределению удельной энтропии $S = c_v \ln P - c_p \ln \rho$, малая пространственная неоднородность которой ответственна за присутствие тепловой конвекции. Градиент температуры в конвективных зонах звезд, разумеется, сверхадиабатический. Однако относительная величина сверхадиабатичности мала:

$$\epsilon = \frac{r}{c_p} \left| \nabla S \right| = \frac{r}{T} \left| \nabla T - (\nabla T)_{\text{ad}} \right| \ll 1. \quad (1)$$

Здесь r — расстояние до центра звезды; $(\nabla T)_{\text{ad}} = g/c_p$ — адиабатический градиент; использовались уравнение состояния и условие равновесия $\nabla P = \rho g$. Ниже будет дана оценка ϵ (1), подтверждающая ее малую величину.

При малой сверхадиабатичности скорости турбулентных конвективных \mathbf{u} и усредненных крупномасштабных \mathbf{v} течений малы по сравнению со скоростью звука. Однако большая радиальная неоднородность среды не допускает приближения несжимаемости. На смену ему приходит приближение неупругости, которое, в частности, означает равенство нулю дивергенции плотности импульса $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. Физический смысл и обоснование приближения неупругости ясно изложены в работе [Lantz, Fan, 1999]. Уравнение для крупномасштабного течения в этом приближении запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{R} + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} - \nabla \left(\frac{P'}{\rho} \right) - \frac{S}{c_p} \mathbf{g}, \quad (2)$$

где \mathbf{R} — тензор напряжений Рейнольдса, $R_{ij} = -\rho \langle u_i u_j \rangle$, угловые скобки означают усреднение, $\nabla \cdot \mathbf{R}$ означает вектор с компонентами $\nabla_j R_{ij}$, где, как и в дальнейшем, повторение индексов означает суммирование. Уравнение движения (2) записано в системе отсчета, вращающейся вместе со звездой с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

В приближении неупругости распределения всех термодинамических параметров среды за исключением энтропии считаются постоянными функциями координат, не зависящими от времени [Lantz, Fan, 1999]. Распределения этих параметров в конвективной зоне заимствованы из модели MESA [Paxton et al., 2011] строения и эволюции звезд, как это объясняется в разделе 2. Энтропия является зависимой переменной, которая в нашей модели подчиняется уравнению переноса тепла

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) S + \frac{1}{\rho T} \nabla_i \rho T \chi_{ij} \nabla_j S - \frac{1}{\rho T} \nabla \cdot \mathbf{F}^{\text{rad}} + \frac{q}{\rho T}. \quad (3)$$

Здесь χ — тензор турбулентной температуропроводности; q — источники/стоки тепла (из-за ядерных реакций в пределах конвективной зоны, высвобождения гравитационной энергии при сжатии звезды и т. п.); \mathbf{F}^{rad} — поток тепла из-за лучистой теплопроводности, который в принятых приближениях равен

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = -\mathbf{g} \frac{16\sigma T^3}{3\rho c_p \kappa}, \quad (4)$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана; κ — непрозрачность.

В уравнениях (2), (3) нужно определить напряжения Рейнольдса и теплопроводность как функции параметров среды и крупномасштабных полей.

1.2. Турбулентные коэффициенты переноса во вращающейся конвективной зоне

Ключевым параметром для влияния вращения на конвективную турбулентность является число Кориолиса

$$\Omega^* = 2\tau\Omega, \quad (5)$$

где $\tau = \ell/u$ — характерное время турбулентного перемешивания; u — среднеквадратичная скорость. Оценим τ для невращающейся конвекции. Для этого

будем использовать теорию средней длины перемешивания (см., например, недавний обзор [Joysse, Tayaar, 2023]), которая лежит в основе приближения неупругости [Lantz, Fan, 1999], а также определяет строение конвективных зон в моделях эволюции звезд. Имеем оценку

$$u^2 = -\frac{\ell^2 g}{4c_p} \frac{\partial S}{\partial r}, \quad (6)$$

где $\ell = \alpha_{\text{MLT}} H_p$ — длина перемешивания, пропорциональная шкале высот давления $H_p = P/(\rho g)$. Турбулентная конвекция переносит поток тепла $\delta F = L_* / (4\pi r^2) - F^{\text{rad}}$:

$$- \rho T \chi_T \frac{\partial S}{\partial r} = \delta F, \quad (7)$$

где L_* — полный поток через сферическую поверхность радиуса r . Полагая $\chi_T = \ell u / 3$ с учетом (6) находим

$$\chi_T = \frac{\ell^2}{6} \sqrt{-\frac{g}{c_p} \frac{\partial S}{\partial r}}, \quad (8)$$

а с учетом (7) получим градиент энтропии

$$-\frac{\partial S_0}{\partial r} = \left(\frac{c_p}{g} \right)^{1/3} \left(\frac{6\delta F}{\rho T \ell^2} \right)^{2/3}, \quad (9)$$

где нижний индекс в обозначении S_0 напоминает о том, что формула получена без учета вращения. Подстановка градиента энтропии (9) в формулу (6) дает оценку времени τ :

$$\tau = \left(\frac{4c_p \rho \ell^2 T}{3g\delta F} \right)^{1/3}. \quad (10)$$

Эту оценку используем в определении числа Кориолиса (5). Все параметры в правой части (10) берем из модели строения звезды (MESA в данной статье). Время τ , а с ним и число Кориолиса, зависят от радиуса r и возрастают с глубиной в конвективной зоне.

Квазилинейная теория турбулентного переноса дает для присутствующего в (3) тензора турбулентной теплопроводности

$$\begin{aligned} \chi_{ij} &= \chi \delta_{ij} + \chi_{\parallel} \hat{\Omega}_i \hat{\Omega}_j, \\ \chi &= \chi_T \phi(\Omega^*), \\ \chi_{\parallel} &= \chi_T C_{\chi} \phi_{\parallel}(\Omega^*), \end{aligned} \quad (11)$$

где C_{χ} — параметр модели (в расчетах данной статьи $C_{\chi} = 2$); $\hat{\Omega} = \Omega / \Omega$ — единичный вектор вдоль оси вращения. Функции $\phi(\Omega^*)$ и $\phi_{\parallel}(\Omega^*)$ показаны на рис. 1. Аналитические выражения для них даны в [Kitchatinov et al., 1994].

В (11) учтена вызванная вращением анизотропия переноса тепла. Величина χ соответствует изотропной теплопроводности, а χ_{\parallel} учитывает дополнительную теплопроводность вдоль оси вращения. Анизот-

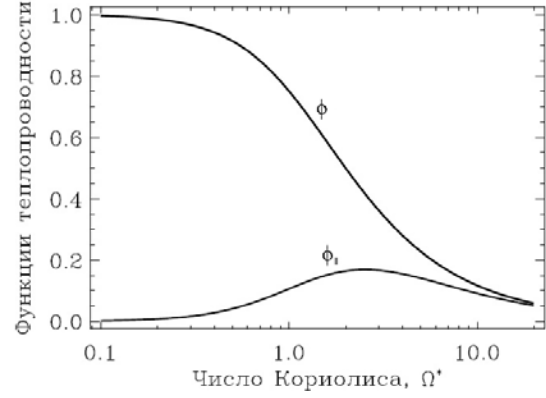


Рис. 1. Функции $\phi(\Omega^*)$ и $\phi_{\parallel}(\Omega^*)$ из формулы (11), определяющие зависимость турбулентной теплопроводности от скорости вращения

ропия теплопроводности играет важнейшую роль в физике дифференциального вращения. Только с ее учетом можно воспроизвести данные гелиосейсмологии в теоретических моделях [Rüdiger et al., 2005]. Как видно из рис. 1, анизотропия исчезает в пределе медленного вращения $\Omega^* \rightarrow 0$, как и должно быть.

Рисунок 1 показывает также уменьшение теплопроводности под влиянием вращения. Этот эффект вращения отчасти компенсируется возрастанием градиента энтропии, что приводит к увеличению χ_T (8). В стационарной модели [Kitchatinov, Olemskoy, 2011] величина S в (8) была одной из зависимых переменных, т. е. была применена нелинейная модель диффузии. В предлагаемой динамической трехмерной модели нелинейная диффузия требует обращения матриц большого размера, что значительно снижает скорость численного счета. Поэтому применяется линейная диффузия и χ_T (8) считается заданной функцией радиуса r , но эффект возрастания градиента энтропии во вращающейся среде все же учитывается путем замены $\partial S / \partial r$ в (8) на скорректированную величину

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S_0 / \partial r}{\sqrt{\phi(\Omega^*) + 0.2\phi_{\parallel}(\Omega^*)}}, \quad (12)$$

где $\partial S_0 / \partial r$ — градиент для невращающейся среды из (9).

Помимо турбулентной теплопроводности, моделирование крупномасштабных течений требует определения тензора напряжений Рейнольдса R_{ij} в уравнении (2). Вероятно, Лебединский [1941] первым установил, что в дополнение к известному вкладу турбулентных вязкостей R_{ij}^v во вращающейся среде с анизотропной турбулентностью присутствуют не-диссипативные напряжения R_{ij}^{Λ} :

$$R_{ij} = R_{ij}^v + R_{ij}^{\Lambda}, \quad (13)$$

которые могут быть причиной дифференциального вращения Солнца. Эффект Лебединского, названный впоследствии Λ -эффектом, был подробно изучен и подтвержден расчетами в теории средних полей [Rüdiger, 1989]. Его наглядное объяснение можно

найти, например, в [Кичатинов, 2005]. Теория Лебединского [1941] соответствует линейному приближению относительно числа Кориолиса (5). Это число действительно мало вблизи поверхности Солнца, но растет с глубиной и становится большим вблизи основания конвективной зоны. Выяснилось, что Λ -эффект, обусловленный анизотропией турбулентности, мал ($\sim 1/\Omega^2$) в глубине конвективной зоны [Kitchatinov, 1986]. Однако анизотропию может заменить неоднородность плотности турбулентной среды, которая также дает Λ -эффект, не малый при больших числах Кориолиса [Kitchatinov, 1987]. Тем не менее, анизотропия важна. Только с учетом анизотропии удастся объяснить обнаруженный сейсмологией приповерхностный слой неоднородного вращения Солнца [Kitashvili et al., 2023; Кичатинов, 2023]. Поэтому Λ -эффект предлагаемой модели

$$R_{ij}^{\Lambda} = -\rho\Omega \left\{ \Lambda_0 \left[\hat{r}_i (\hat{\Omega} \times \hat{r})_j + \hat{r}_j (\hat{\Omega} \times \hat{r})_i \right] - \Lambda_1 (\hat{r} \cdot \hat{\Omega}) \left[\hat{\Omega}_i (\hat{\Omega} \times \hat{r})_j + \hat{\Omega}_j (\hat{\Omega} \times \hat{r})_i \right] \right\} \quad (14)$$

учитывает как неоднородность, так и анизотропию. Здесь

$$\Lambda_0 = v_T \left(\frac{\alpha_{\text{MLT}}}{\gamma} \right)^2 \lambda_0(\Omega^*), \quad \Lambda_1 = v_T \left(\frac{\alpha_{\text{MLT}}}{\gamma} \right)^2 \lambda_1(\Omega^*) \quad (15)$$

функции радиуса r , $\gamma = c_p / c_v$ — показатель адиабаты; $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / r$ — единичный вектор в радиальном направлении; $v_T = 0.8\chi_T$ (квазилинейная теория турбулентного переноса дает значение 0.8 для числа Прандтля) и

$$\lambda_0(\Omega^*) = J_0(\Omega^*) + 2I_0(\Omega^*), \quad \lambda_1(\Omega^*) = J_1(\Omega^*) + 2I_1(\Omega^*). \quad (16)$$

Функции J_0 и J_1 учитывают вклад неоднородности плотности, а I_0 и I_1 — вклад анизотропии турбулентности. Функции (16) показаны на рис. 2. Их аналитические выражения даны в [Kitchatinov, Rüdiger, 2005]. Вклад λ_0 в (14) отвечает за перенос углового момента вдоль радиуса. Его отрицательная величина означает перенос к центру звезды. Вклад λ_1 дает перенос углового момента вдоль оси вращения. Его положительная величина означает перенос от полюсов к экватору. Вклад λ_0 доминирует при малых Ω^* , т. е. вблизи поверхности звезды. Возможно, по этой причине скорость вращения вблизи поверхности Солнца растет с глубиной [Schou et al., 1998].

На рис. 2 показаны также функции f_v и f_μ зависимостей турбулентных вязкостей от Ω^* . Как и турбулентная теплопроводность, вязкость во вращающейся среде анизотропна. Анизотропия вязкости не столь важна для крупномасштабных течений как анизотропия теплопроводности, но создает значительные трудности для численного моделирования. Анизотропная вязкость способна трансформировать

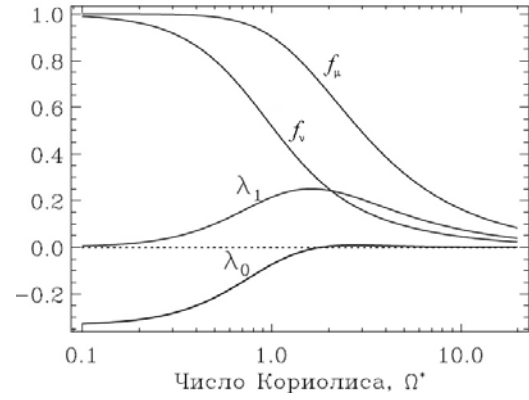


Рис. 2. Функции из формул (15)–(17), определяющие зависимость Λ -эффекта и эффективных вязкостей от скорости вращения звезды

тороидальные неосесимметричные течения в полоидальные и наоборот. Это приводит к «сцеплению» уравнений для полоидальных и тороидальных течений, что увеличивает размер подлежащих обращению матриц и понижает скорость численного счета. В предлагаемой модели использовалась диссипативная составляющая напряжений Рейнольдса (13) с изотропными вязкостями

$$R_{ij}^v = \rho\nu (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + \rho\mu \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v}, \quad \nu = v_T f_v(\Omega^*), \quad \mu = v_T f_\mu(\Omega^*). \quad (17)$$

Функции f_v и f_μ также показаны на рис. 2. Во вращающейся среде коэффициенты вязкости для направлений вдоль и поперек оси вращения различны. Вязкость ν в (17) равна полусумме вязкостей для этих двух направлений. Тензор вязкостей для вращающейся турбулентности был рассчитан в [Kitchatinov et al., 1994], где даны аналитические выражения для функций $\phi_1(\Omega^*)$, $\phi_2(\Omega^*)$ и $\phi_3(\Omega^*)$, из которых строятся $f_v = \phi_1 + 0.5\phi_2$ и $f_\mu = \phi_3$.

1.3. Скалярные потенциалы течения и граничные условия

Ограничение на поле скорости, налагаемое условием неупругости $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, позволяет определить скорость в терминах двух скалярных потенциалов [Chandrasekhar, 1961],

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\rho r^2} (\hat{L}V) - \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) - \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r} \left(\frac{1}{\rho \sin \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right). \quad (18)$$

Здесь использованы обычные сферические координаты, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ и $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ — единичные векторы в меридиональном и азимутальном направлениях, $V(r, \vartheta, \varphi)$ и $W(r, \vartheta, \varphi)$ — потенциалы полоидальной и тороидальной составляющих течения соответственно и

$$\hat{L} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (19)$$

угловая часть оператора Лапласа.

Линии тока тороидального течения лежат на сферических поверхностях постоянного радиуса r . Полоидальное течение имеет тороидальный векторный потенциал. В предлагаемой модели уравнение (2) преобразовано к уравнениям для скалярных потенциалов. Радиальная составляющая ротора уравнения (2) дает уравнение для тороидального потенциала W . Радиальная составляющая уравнения (2), к которому взятие ротора применено дважды, дает уравнение для полоидального течения. Такая процедура получения уравнений для крупномасштабного течения отличается от используемой в теории динамо, где уравнение для полоидального магнитного поля дает радиальная составляющая уравнения индукции без применения двойного ротора [Краузе, Рэдлер, 1984]. Отличие связано с тем, что солениоидальность магнитного поля является фундаментальным законом, а солениоидальность плотности импульса — следствием приближения неупругости. Взятие ротора от уравнения движения «отфильтровывает» потенциальные силы. Уравнения для крупномасштабных течений в терминах скалярных потенциалов довольно громоздки. Они выписаны в Приложении.

Для однозначного решения уравнений требуются граничные условия. Естественным условием для крупномасштабного течения является обращение в ноль недиагональных составляющих тензора напряжений $R_{r\vartheta} = R_{r\varphi} = 0$ на нижней (r_1) и верхней (r_2) границах области моделирования. Нижняя граница помещается в основании конвективной зоны, а верхняя — на малой глубине под поверхностью звезды (в предлагаемой модели $r_2 = 0.97R_*$, если не оговорено другое значение). Такие граничные условия требуют обращения в ноль горизонтальной составляющей поверхностной плотности внешних сил и означают, что крупномасштабные течения определяются процессами в конвективной зоне, а не внешним воздействием. Эквивалентная запись граничных условий в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{r\vartheta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\sin \vartheta R_{r\varphi})}{\partial \vartheta} &= 0, \\ \frac{\partial R_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\sin \vartheta R_{r\vartheta})}{\partial \vartheta} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

приводит с учетом формул (14), (17) и (18) к условиям для скалярных потенциалов

$$\begin{aligned} (rU - 2W) + \Omega r^2 \times \\ \times [\cos \vartheta \Lambda_0 + (\cos \vartheta / 3 + 2 \cos^3 \vartheta / 5) \Lambda_1] &= 0, \\ 2Q + rD &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где U , Q и D — новые зависимые переменные,

$$U = \frac{\partial W}{\partial r}, Q = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial r}, D = -\frac{(\hat{L}V)}{\rho r^2} - \frac{\partial Q}{\partial r}. \quad (22)$$

Целесообразность введения новых зависимых переменных связана с численным методом модели и объяснена ниже. Используются также «закрытые» граничные условия $v_r = 0$, что означает $V = 0$ на границах.

На нижней границе в конвективную зону поступает сферически-симметричный поток тепла, $F_r^{\text{conv}}(r_1) = \delta F(r_1)$, где

$$\begin{aligned} F_r^{\text{conv}} = -\rho T \chi_T \left[\left(\phi(\Omega^*) + C_\chi \phi_\parallel(\Omega^*) \cos^2 \vartheta \right) \frac{\partial S}{\partial r} - \right. \\ \left. - C_\chi \phi_\parallel(\Omega^*) \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

На поверхности происходит излучение в окружающее пространство:

$$F_r^{\text{conv}}(r_2) = \frac{L(r_2)}{4\pi r_2^2} \left(1 + 4 \frac{S}{c_p} \right). \quad (24)$$

Здесь предполагается, что тонкий слой от r_2 до поверхности звезды является идеальным теплообменником [Kitchatinov, Olesmsky, 2011].

1.4. Разложения по сферическим функциям и сохранение углового момента

Граничные условия (20) обеспечивают сохранение углового момента

$$\mathbf{M} = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho r^2 \sin \vartheta (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) d\varphi d\vartheta dr. \quad (25)$$

Однако формулировка закона сохранения для вращающейся системы координат имеет свою специфику. Рассмотрим вращающуюся декартову систему координат с осью Z вдоль оси вращения и плоскостью (x, y) в плоскости экватора; долгота φ в (25) отсчитывается от оси X . Продифференцируем угловой момент (25) по времени и подставим $\partial \mathbf{v} / \partial t$ из уравнения (2). Интегрируя по частям, найдем

$$\dot{M}_z = 0, \dot{M}_x = \Omega M_y, \dot{M}_y = -\Omega M_x. \quad (26)$$

M_z и абсолютная величина нормальной к оси вращения составляющей углового момента $M_\perp = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ не меняются со временем. Эти обстоятельства можно использовать для контроля численных решений.

Формулы для углового момента упрощаются с использованием разложений по сферическим функциям. В представлении (18) для скорости, а также во многих местах уравнений для потенциалов течения (см. Приложение) присутствует оператор \hat{L} (19). Поэтому удобно использовать разложения по собственным функциям $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ этого оператора

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{l,m}(\vartheta, \varphi) &= 2 \sin(m\varphi) \bar{P}_l^{|m|}(\cos \vartheta) \text{ для } m < 0, \\ \bar{Y}_{l,m}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{2} \bar{P}_l^0(\cos \vartheta) \text{ для } m = 0, \\ \bar{Y}_{l,m}(\vartheta, \varphi) &= 2 \cos(m\varphi) \bar{P}_l^m(\cos \vartheta) \text{ для } m > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где черта сверху означает нормированную функцию, в частности, для нормированных присоединенных полиномов Лежандра

$$\bar{P}_l^{|m|}, \int_0^\pi \left(\bar{P}_l^{|m|}(\cos \vartheta) \right)^2 \sin \vartheta d\vartheta = 1.$$

Для потенциала W тороидального течения используем разложение

$$W(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{l=l_{\min}}^{l_{\max}} W_{l,m}(r, t) \bar{Y}_{l,m}(\vartheta, \varphi) \quad (28)$$

и аналогично для остальных потенциалов течения и энтропии. Здесь $l_{\min} = |m|$ для энтропии и $l_{\min} = \max(|m|, 1)$ для потенциалов течения, $l_{\max} = L + \max(|m|, 1) - 1$, M и L определяют число гармоник в разложении (28) и являются параметрами модели. Особенность формулы (28) заключается в том, что максимальные азимутальное M и меридиональное L волновые числа не зависят друг от друга и могут быть произвольными. Это обеспечивает гибкость модели, которую можно использовать не только для нелинейных трехмерных численных экспериментов, но также для расчета осесимметричных течений ($M=0$) и для анализа их устойчивости к малым возмущениям с небольшими m .

Подставляя (28) в (25) убеждаемся, что только моды с $l=1$ дают вклад в угловой момент:

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, M_z) &= \\ &= -\frac{8\pi}{\sqrt{3}} \int_{r_1}^{r_2} \rho r^2 (W_{1,1}(r), -W_{1,-1}(r), W_{1,0}(r)) dr. \end{aligned} \quad (29)$$

Разложения (28) приводят также к полезной формуле для полной кинетической энергии $E_k = \int \rho v^2 d^3\mathbf{r} / 2$,

$$\begin{aligned} E_k &= 2\pi \sum_{l,m} l(l+1) \times \\ &\times \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{l(l+1)}{\rho r^2} V_{l,m}^2(r) + \rho Q_{l,m}^2(r) + \rho W_{l,m}^2(r) \right] dr, \end{aligned} \quad (30)$$

которая показывает, что кинетическая энергия является не только суперпозицией независимых вкладов полоидальной и тороидальной составляющих течения, но и распадается на вклады отдельных гармоник в разложении этих течений по сферическим функциям. Необходимо отметить, что такая суперпозиция выполняется глобально для полной энергии, но не имеет места для локальной плотности энергии.

Формулы (29) и (30) можно использовать для диагностики численных решений.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Разложения (28) по сферическим функциям приводят к системе уравнений в частных производных относительно двух независимых переменных t и r . Уравнения решались численно конечно-разностными методами.

В задаче присутствуют тонкие пограничные слои Экмана [Digneu, 1989]. Поэтому конечно-разностная сетка по радиусу должна быть плотнее у границ. Сетка из N узлов включает границы r_1 , r_2 и промежуточные узлы

$$\begin{aligned} r_j &= \frac{1}{2} \left[r_2 + r_1 - (r_2 - r_1) \cos \left(\pi \frac{j-3/2}{N-2} \right) \right], \\ 2 \leq j \leq N-1. \end{aligned} \quad (31)$$

Узлы представляют собой линейное отображение нулей полиномов Чебышева в интервале $[-1, 1]$

на $[r_1, r_2]$. Такой выбор конечно-разностной сетки хорошо зарекомендовал себя в предыдущих двухмерных моделях [Kitchatinov, Olemsko, 2011, 2012]. Он также позволяет применять метод квадратур Гаусса—Чебышева [Press et al., 1992] для вычисления интегралов (29), (30) с высокой точностью. Коэффициенты уравнений зависят от параметров строения звезды, которые брались из модели MESA [Paxton et al., 2011]. Для пересчета результатов MESA к узлам сетки (31) применена интерполяция кубическими сплайнами. Для упрощения конечно-разностного вычисления производных введены новые зависимые переменные U , Q , и D (22). Тогда уравнения включают лишь пространственные производные первого порядка и запись уравнений для средних точек между двумя соседними узлами обеспечивает точность второго порядка по радиусу.

Модель имеет также второй порядок точности по времени. Для расчета всех вкладов в уравнения, кроме диффузионных (вязкость и теплопроводность), применялся метод Рунге—Кутты второго порядка. Диффузия учтена методом Кранка—Николсона (Crank—Nicolson [Press et al., 1992]). Точнее, явное представление диффузии входило с весом $(1-q)$, а неявное — с весом q , где q — параметр модели, $0.5 \leq q \leq 1$ (ограничение снизу следует из требования численной устойчивости). В предлагаемой модели $q=0.501$, если не оговорено другое значение. Такая величина q обеспечивает численную устойчивость, но близко к $q=0.5$ схемы Кранка—Николсона второго порядка точности.

Шаг по времени принят равным одной сотой периода вращения, $\Delta t = 0.01 P_{\text{rot}}$. Число узлов по радиусу $N=31$ обеспечивало хорошую точность расчетов для Солнца с периодом вращения $P_{\text{rot}} = 25.4$ сут; увеличение N не приводило к видимому изменению результатов. Присутствие пограничных слоев Экмана требует изменения N пропорционально $P_{\text{rot}}^{-1/2}$ для меньших периодов вращения.

3. ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Модель MESA звезды с массой Солнца и металличностью $Z=0.02$ дает для возраста 4.6 миллиарда лет радиус $R_* = 1.003 R_{\odot}$ и светимость $L_* = 0.999 R_{\odot}$. Строение этой звезды было принято в расчетах для Солнца.

На рис. 3 показано относительное отклонение ϵ (1) от адиабатичности в пределах конвективной зоны. Видно, что в соответствии с приближением неупругости [Lantz, Fan, 1999] радиальная неоднородность термодинамических параметров во всей конвективной зоне за исключением тонкого приповерхностного слоя близка к адиабате.

3.1. Релаксация к осесимметричному стационарному состоянию

Были проведены расчеты для начального состояния, в котором течение отсутствовало ($\mathbf{v}=0$), а распределение энтропии (12) не зависело от долготы. Максимальные волновые числа в разложениях (25) были

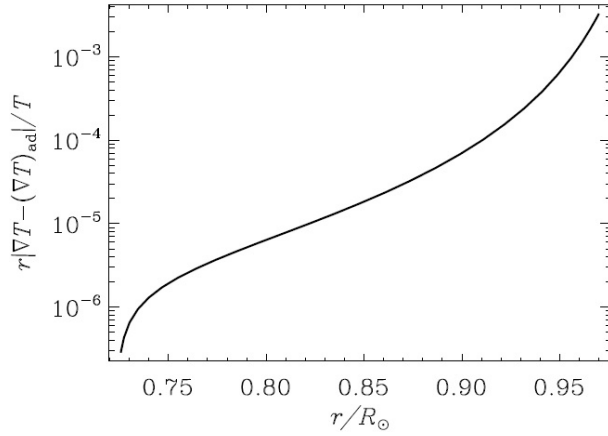


Рис. 3. Относительная величина отклонения от адиабатической стратификации в конвективной зоне Солнца согласно формулам (1) и (9)

$L=21$ и $M=5$, т. е. расчеты допускали отклонения от осевой симметрии.

Поскольку в начальном состоянии угловой момент (25) во вращающейся системе отсчета равен нулю, то согласно правилам сохранения (26), это равенство должно выполняться и в последующем. Однако наш численный метод не является консервативным относительно углового момента. Поэтому равенства (26) нарушались в процессе численного счета, но величины M_z и M_\perp не превышали 10^{-4} от произведения $M_0 = I\Omega$ момента инерции I конвективной зоны на угловую скорость.

Со временем возникает и усиливается течение из-за Λ -эффекта (14) и бароклинного источника полойдального течения (см. Приложение). Из-за анизотропии теплопроводности (11), появляется зависимость энтропии от широты. Однако и течение, и распределение энтропии сохраняли осевую симметрию начального состояния. Это означает, что «численные шумы» из-за конечной точности численных расчетов не приводят к неосесимметричным возмущениям в предлагаемой модели.

За время порядка R_*^2/ν (~ 10 лет) устанавливается стационарное состояние, симметричное относительно плоскости экватора. Результаты показаны на рис. 4–6. Согласие с наблюдениями несколько ухудшилось по сравнению со стационарной осесимметричной моделью [Kitchatinov, Olemskoу, 2011], вероятно, в результате упрощений, перечисленных в разделе 1, но все же остается довольно близким. На рис. 4 показано полученное в модели дифференциальное вращение. Здесь для сравнения с наблюдениями к рассчитанной скорости вращения добавлена угловая скорость Ω системы отсчета. Имеется близкое согласие с доплеровскими измерениями вращения поверхности Солнца [Snodgrass, Ulrich, 1990] и с данными гелиосейсмологии. Меридиональная циркуляция (рис. 5) также согласуется с сейсмологическими измерениями [Rajaguru, Antia, 2015; Gizon et al., 2020].

На рис. 6 показано различие температуры $\delta T = T\delta S/c_p$ между полюсами и экватором в зависимости от радиуса r . Дифференциальная температура важна для термовращательного равновесия в основном объеме конвективной зоны и возбуждения мери-

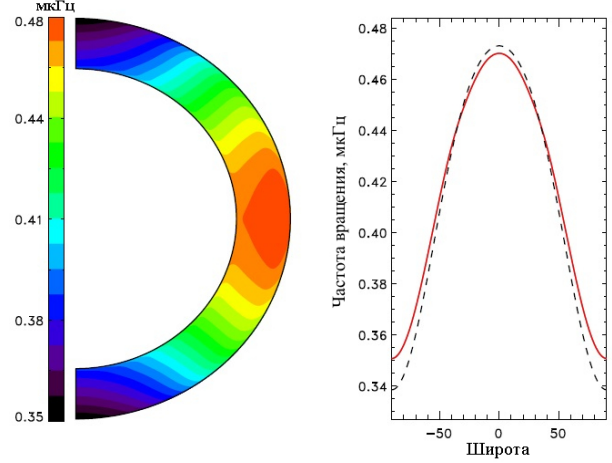


Рис. 4. Дифференциальное вращение в асимптотическом осесимметричном состоянии: слева — изолинии угловой скорости; справа — дифференциальное вращение на поверхности по результатам расчетов (сплошная линия) и доплеровских измерений [Snodgrass, Ulrich, 1990] (штриховая линия)

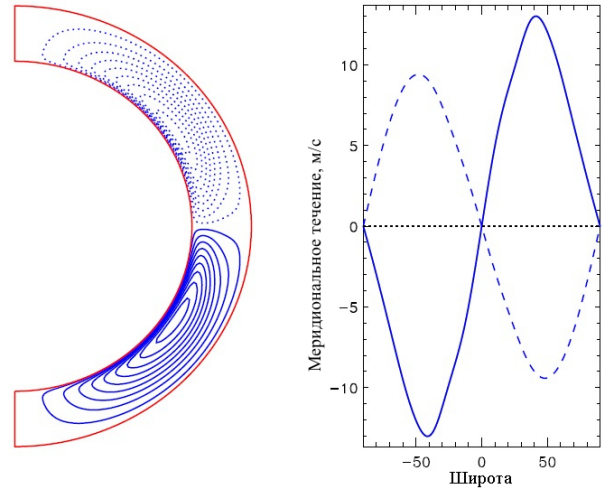


Рис. 5. Линии тока (слева) меридиональной циркуляции по результатам модели. Сплошная и пунктирная линии показывают соответственно циркуляцию по часовой стрелке и против. Справа — скорость меридионального течения на поверхности (сплошная линия) и у дна конвективной зоны (штриховая)

диональной циркуляции вблизи ее границ [Nazra et al., 2023]. Необходимо отметить, что дифференциальная температура $\delta T \simeq 1.4$ К на верхней границе области моделирования не равна ее значению на фотосфере. Если слой от верней границы до поверхности звезды действительно близок по своим свойствам к идеальному теплообменнику, как это предполагается в модели, то равенство значений на границе и поверхности имеет место для возмущений энтропии $\delta S \propto \delta T/T$. Тогда из-за быстрого падения температуры к поверхности дифференциальная температура на поверхности составляет «неизмеримые» сотые доли градуса.

3.2. Динамика неосесимметричных возмущений

Были проведены расчеты, начальным состоянием которых было стационарное осесимметричное реше-

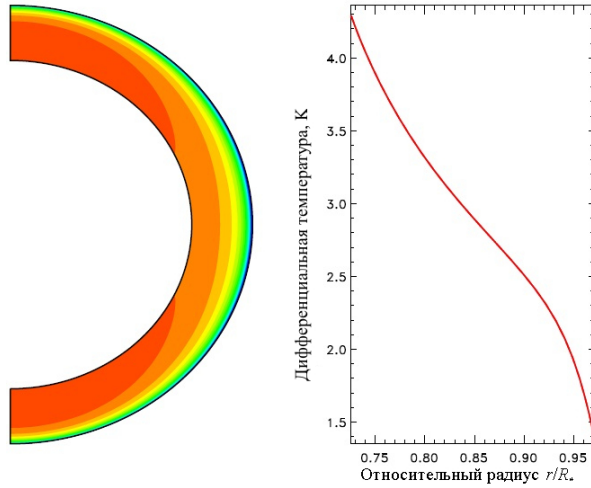


Рис. 6. Распределение энтропии в стационарном осесимметричном состоянии. Слева — изэнтروпийные линии, справа — так называемая дифференциальная температура — разница температуры между полюсами и экватором в зависимости от радиуса

ние (см. рис. 4–6), к которому добавлены неосесимметричные возмущения тороидального течения с $1 \leq m \leq 5$ и амплитудой ~ 0.1 от осесимметричной составляющей. Со временем из-за нелинейных взаимодействий появляются неосесимметричные полоидальные течения и возмущения энтропии.

В случае затухания отклонений от осевой симметрии такие расчеты могли бы показать собственные моды уравнений модели с конечными m . Расчеты, однако, обнаружили неосесимметричную неустойчивость, указывающую на внутреннее противоречие гидродинамики средних полей в приложениях к конвективному оболочкам звезд. Неосесимметричные возмущения первоначально растут со временем. Затем рост останавливается по достижении некоторой амплитуды нерегулярно изменяющихся во времени возмущений. При этом осесимметричная часть решения также приобретает нерегулярно изменяющуюся во времени составляющую. Данная неустойчивость не является новой [Rüdiger, Spahn, 1992; Tuominen et al., 1994]. По всей вероятности, она является тепловой конвекцией. Об этом говорит то обстоятельство, что неустойчивость выключается, если положить $v_r = 0$ в уравнении для энтропии. В гидродинамике средних полей предполагается, что влияние турбулентной конвекции полностью учтено введением эффективных коэффициентов переноса. Однако присутствие конвективной неустойчивости говорит о непоследовательности такого учета: коэффициенты переноса не заменяют конвекцию.

Обсуждаемая неустойчивость обнаруживалась и в осесимметричной стационарной модели дифференциального вращения [Kitchatinov, Olemskoy, 2011]. Для ее устранения требовалась достаточно большая величина отношения $\alpha_{\text{MLT}} = \ell / H_p$ длины перемешивания к шкале высот, причем, чем ближе верхняя граница r_2 области вычислений к поверхности звезды, тем большая величина α_{MLT} требуется для устойчивости. Это говорит о том, что неустойчивость возникает вблизи поверхности, что отмечали также [Tuominen et al., 1994]. Это объясняется возрастанием

сверхадиабатичности к поверхности звезды (см. рис. 3). Увеличение длины перемешивания уменьшает градиент энтропии (9) и увеличивает диффузию (8). Поэтому увеличение α_{MLT} устраняет неустойчивость. Заметим, что уменьшение длины перемешивания у дна конвективной зоны к неустойчивости не приводит [Кичатинов, Непомнящих, 2017]. В осесимметричных моделях, $\alpha_{\text{MLT}} = 2.2$ обеспечивало устойчивость для $r_2 = 0.97R_*$. Эта величина α_{MLT} используется и в данной статье. Поэтому модель устойчива к осесимметричным возмущениям (см. рис. 4–6). Однако во вращающейся конвекции доминируют неосесимметричные моды (бананообразные ячейки [Glatzmaier, Gilman, 1981]). Поэтому неустойчивость относительно неосесимметричных возмущений сохраняется.

Возможно, обсуждаемое противоречие в гидродинамике средних полей может быть устранено учетом зависимости α_{MLT} от радиуса, следующей, например, из минимизации суммарной (кинетической плюс тепловой) энергии конвективной зоны. Однако такая задача должна быть темой отдельной работы. В данной статье применен искусственный метод исключения тепловой конвекции путем использования фиксированного стационарного распределения энтропии, полученного в осесимметричной модели (см. рис. 6). Тогда начальные неосесимметричные возмущения затухают со временем.

Такое затухание хорошо видно на рис. 7, где показана зависимость от времени кинетической энергии возмущений для различных m отдельно для тороидальной и полоидальной составляющих течения. По мере затухания неосесимметричных возмущений их нелинейное взаимодействие становится слабым. Поскольку коэффициенты уравнений модели не зависят от долготы, моды с различными m становятся независимыми. По истечении достаточного времени для каждого m остается лишь наиболее медленно затухающая долгоживущая собственная мода уравнений модели. При этом зависимость энергии от времени имеет вид $\exp(-2t/\tau_m)$, где τ_m — время жизни собственной моды. Такие зависимости от времени образуют прямые линии на рис. 7. Для установления экспоненциальных зависимостей требуется достаточно длительное время, чтобы из смеси собственных мод в начальном условии выжили лишь наиболее долгоживущие. Параметры собственных мод приведены в таблице.

Параметры неосесимметричных собственных мод крупномасштабных течений. Приведены времена жизни τ_m , отношение энергий тороидальной составляющей течения к полоидальной $E_{\text{tor}}/E_{\text{pol}}$ и индексы симметрии для экваториально-симметричных (S) и антисимметричных (A) мод

m	τ_{m2} годы	$E_{\text{tor}}/E_{\text{pol}}$	Симметрия
1	0.754	45.9	S
2	4.64	21 200	A
3	1.22	2080	A
4	2.30	1.00	S
5	0.970	1.24	S

Наблюдения последних лет обнаружили на Солнце r -моды глобальных колебаний [Löptien et al., 2018;

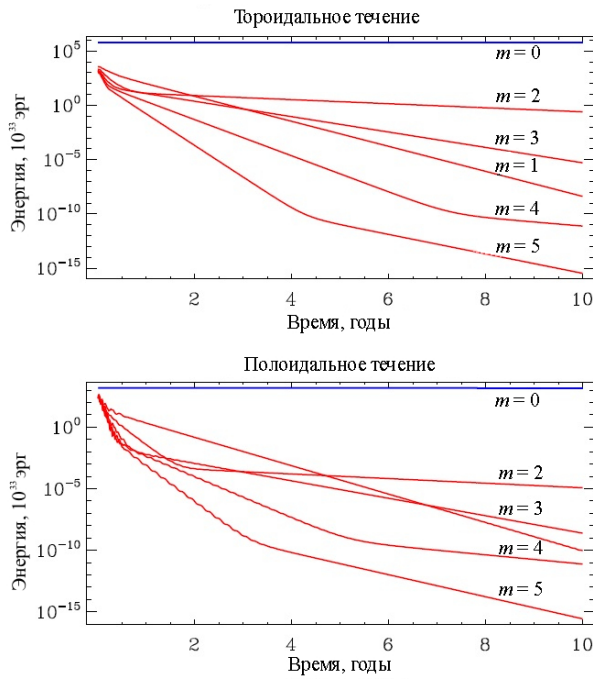


Рис. 7. Кинетическая энергия (30) тороидальных (вверху) и полоидальных (внизу) составляющих течений с различными азимутальными волновыми числами m . Энергия представлена в единицах 10^{33} эрг

Mandal et al., 2021; Mandal, Hanasoge, 2024] — дрейфующие по долготе горизонтальные вихри [Saio, 1982]. Отличительным признаком r -мод, в частности, является малая величина радиальных смещений. Как видно из таблицы, относительно малая величина радиальных (полоидальных) течений получена для m от 1 до 3. Структура течений для собственных мод с $m=2$ и 3 показана на рис. 8, 9.

Тороидальные вихри (см. рис. 8, 9) центрированы на экваторе и имеют так называемую секторальную структуру, т. е. не имеют узлов со сменой знака по широте. Это качественно согласуется с наблюдениями Löptien et al. [2018]. Однако ввиду обсуждавшегося выше противоречия результаты данной статьи для неосесимметричных течений нужно считать предварительными. Поэтому воздержимся от более детального сравнения с наблюдениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью работы было обобщение стационарных моделей дифференциального вращения с учетом зависимости от времени и отклонения от цилиндрической симметрии относительно оси вращения. Целесообразность такой работы определяется наблюдениями вихревых крупномасштабных течений на Солнце, а также планами объединения с моделями динамо.

Новая модель крупномасштабных течений в конвективных оболочках Солнца и звезд развита в рамках гидродинамики средних полей и реализована в виде программы численного решения уравнений гидродинамики и переноса тепла. Численная модель использует спектральный метод разложения по горизонтальным координатам в комбинации с конечноразностным дифференцированием второго порядка точности по времени и радиусу. Это дает надежный инструмент для будущих теоретических исследований

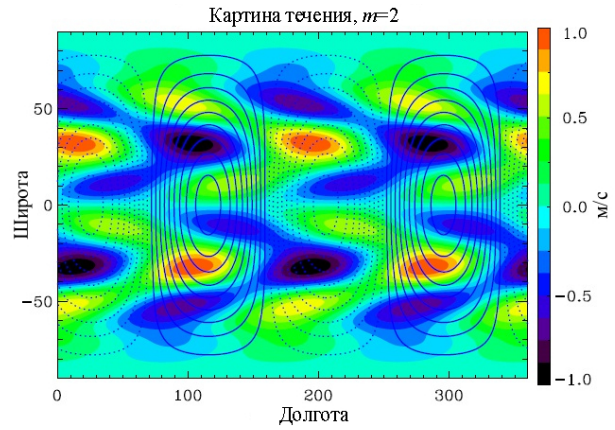


Рис. 8. Картина течения собственной моды с азимутальным волновым числом $m=2$ для радиуса $r=0.9R_*$. Сплошные (пунктирные) линии — линии тока тороидального течения с циркуляцией по (против) часовой стрелки. Цветом показана радиальная скорость. Амплитуда скорости 1 м/с затухающей во времени моды определяется нормировкой

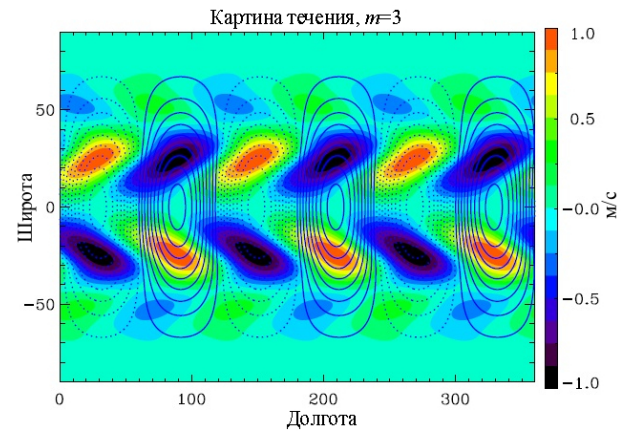


Рис. 9. То же, что и на рис. 8, но для собственной моды с $m=3$

Солнца и звезд с внешними конвективными оболочками.

Первые расчеты показали, что осесимметричная составляющая течения близко воспроизводит установленную гелиосейсмологией картину дифференциального вращения и меридиональной циркуляции. В то же время расчеты неосесимметричных течений обнажили внутреннее противоречие гидродинамики средних полей в применении к конвективным зонам звезд, требующее пересмотра теории длины перемешивания. Развита модель может и должна быть использована для устранения этого противоречия. Тем не менее, первые расчеты неосесимметричных течений показали по меньшей мере качественное соответствие наблюдениям крупномасштабных волн Россби на Солнце.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Кичатинов Л.Л. Дифференциальное вращение звезд. *УФН*. 2005, т. 175, № 5, с. 475–494.
 Кичатинов Л.Л. Происхождение приповерхностного слоя неоднородного вращения Солнца. *Письма в АЖ*. 2023, т. 49, № 11, с. 829–836. DOI: [10.31857/S0320010823110049](https://doi.org/10.31857/S0320010823110049).

- Кичатинов Л.Л., Непомнящих А.А. Согласованная модель солнечного динамо и дифференциального вращения. *Письма в АЖ*. 2017, т. 43, № 5, с. 370–382. DOI: [10.7868/S0320010817040039](https://doi.org/10.7868/S0320010817040039).
- Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. *Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо*. М.: Мир, 1984.
- Лебединский А.И. Вращение Солнца. *Астрономический журнал*. 1941, т. 18, № 1, с. 10–25.
- Balona L.A., Abedigamba O.P. Differential rotation in K, G, F and A stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016, vol. 461, iss. 1, pp. 497–506. DOI: [10.1093/mnras/stw1443](https://doi.org/10.1093/mnras/stw1443).
- Barnes J.R., Collier Cameron A., Donati J.-F., et al. The dependence of differential rotation on temperature and rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2005, vol. 357, iss. 1, pp. L1–L5. DOI: [10.1111/j.1745-3933.2005.08587.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2005.08587.x).
- Brandenburg A., Elstner D., Masada Y., Pipin V. Turbulent processes and mean-field dynamo. *Space Sci. Rev.* 2023, vol. 219, iss. 7, id. 55. DOI: [10.1007/s11214-023-00999-3](https://doi.org/10.1007/s11214-023-00999-3).
- Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Clarendon Press. Oxford. 1961.
- Charbonneau P. Dynamo models of the solar cycle. *Living Reviews in Solar Physics*. 2020, vol. 17, iss. 1, id. 4. DOI: [10.1007/s41116-020-00025-6](https://doi.org/10.1007/s41116-020-00025-6).
- Charbonneau P., Sokoloff D. Evolution of solar and stellar dynamo theory. *Space Sci. Rev.* 2023, vol. 219, iss. 5, id. 35. DOI: [10.1007/s11214-023-00980-0](https://doi.org/10.1007/s11214-023-00980-0).
- Collier Cameron A., Donati J.-F. Doin' the twist: secular changes in the surface differential rotation on AB Doradus. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2002, vol. 329, iss. 1, pp. L23–L27. DOI: [10.1046/j.1365-8711.2002.05147.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05147.x).
- Durney B.R. On the behavior of the angular velocity in the lower part of the solar convection zone. *Astrophys. J.* 1989, vol. 338, p. 509. DOI: [10.1086/167214](https://doi.org/10.1086/167214).
- Gizon L., Cameron R., Pourabdian M., et al. Meridional flow in the Sun's convection zone is a single cell in each hemisphere. *Science*. 2020, vol. 368, iss. 6498, p. 1469–1472. DOI: [10.1126/science.aaz7119](https://doi.org/10.1126/science.aaz7119).
- Glatzmaier G.A., Gilman P.A. Compressible convection in a rotating spherical shell — Part two — a linear anelastic model. *Astrophys. J. Suppl.* 1981, vol. 45, pp. 351–380. DOI: [10.1086/190715](https://doi.org/10.1086/190715).
- Hazra G., Nandy D., Kitchatinov L., Choudhuri A.R. Mean field models of flux transport dynamo and meridional circulation in the Sun and stars. *Space Sci. Rev.* 2023, vol. 219, iss. 5, id. 39. DOI: [10.1007/s11214-023-00982-y](https://doi.org/10.1007/s11214-023-00982-y).
- Hotta H., Bekki Y., Gizon L., et al. Dynamics of large-scale solar flows. *Space Sci. Rev.* 2023, vol. 219, iss. 8, id. 77. DOI: [10.1007/s11214-023-01021-6](https://doi.org/10.1007/s11214-023-01021-6).
- Joyce M., Tayar J. A review of the mixing length theory of convection in 1D stellar modeling. *Galaxies*. 2023, vol. 11, iss. 3, id. 75. DOI: [10.3390/galaxies11030075](https://doi.org/10.3390/galaxies11030075).
- Käpylä P.J., Browning M.K., Brun A.S., et al. Simulations of solar and stellar dynamos and their theoretical interpretation. *Space Sci. Rev.* 2023, vol. 219, iss. 7, id. 58. DOI: [10.1007/s11214-023-01005-6](https://doi.org/10.1007/s11214-023-01005-6).
- Karak B.B. Models for the long-term variations of solar activity. *Living Reviews in Solar Physics*. 2023, vol. 20, iss. 1, id. 3. DOI: [10.1007/s41116-023-00037-y](https://doi.org/10.1007/s41116-023-00037-y).
- Kichatinov L.L. Turbulent transport of angular momentum and differential rotation. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 1986, vol. 35, iss. 1, pp. 93–110. DOI: [10.1080/03091928608245888](https://doi.org/10.1080/03091928608245888).
- Kichatinov L.L. A mechanism for differential rotation based on angular momentum transport by compressible convection. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 1987, vol. 38, iss. 4, pp. 273–292. DOI: [10.1080/03091928708210111](https://doi.org/10.1080/03091928708210111).
- Kitchatinov L.L. The dependence of stellar activity cycles on effective temperature. *Res. Astron. Astrophys.* 2022, vol. 22, iss. 12, id. 125006. DOI: [10.1088/1674-4527/ac9780](https://doi.org/10.1088/1674-4527/ac9780).
- Kitchatinov L.L., Olemskoy S.V. Differential rotation of main-sequence dwarfs and its dynamo efficiency. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011, vol. 411, iss. 2, pp. 1059–1066. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2010.17737.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17737.x).
- Kitchatinov L.L., Olemskoy S.V. Differential rotation of main-sequence dwarfs: predicting the dependence on surface temperature and rotation rate. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012, vol. 423, iss. 4, pp. 3344–3351. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.21126.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21126.x).
- Kitchatinov L.L., Rüdiger G. Differential rotation and meridional flow in the solar convection zone and beneath. *Astronomische Nachrichten*. 2005, vol. 326, iss. pp. 379–385. DOI: [10.1002/asna.200510368](https://doi.org/10.1002/asna.200510368).
- Kitchatinov L.L., Pipin V.V., Ruediger G. Turbulent viscosity, magnetic diffusivity, and heat conductivity under the influence of rotation and magnetic field. *Astronomische Nachrichten*. 1994, vol. 315, no. 2, pp. 157–170. DOI: [10.1002/asna.2103150205](https://doi.org/10.1002/asna.2103150205).
- Kitiashvili I.N., Kosovichev A.G., Wray A.A., et al. Leptocline as a shallow substructure of near-surface shear layer in 3D radiative hydrodynamic simulation. *Monthly Notices of the royal astronomical society*. 2023, vol. 518, iss. 1, pp. 504–512. DOI: [10.1093/mnras/stac2946](https://doi.org/10.1093/mnras/stac2946).
- Lantz S.R., Fan Y. Anelastic magnetohydrodynamic equations for modeling solar and stellar convection zones. *Astrophys. J. Suppl.* 1999, vol. 121, iss. 1, pp. 247–264. DOI: [10.1086/313187](https://doi.org/10.1086/313187).
- Löptien B., Gizon L., Birch A.C., et al. Global-scale equatorial Rossby waves as an essential component of solar internal dynamics. *Nature Astronomy*. 2018, vol. 2, pp. 568–573. DOI: [10.1038/s41550-018-0460-x](https://doi.org/10.1038/s41550-018-0460-x).
- Mandal K., Hanasoge S.M. Probing depth variations of solar inertial modes through normal mode coupling. *Astrophys. J.* 2024, vol. 967, iss. 1, id. 46. DOI: [10.3847/1538-4357/ad391b](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad391b).
- Mandal K., Hanasoge S.M., Gizon, L. Detection of Rossby modes with even azimuthal orders using helioseismic normal-mode coupling. *Astron. Astrophys.* 2021, vol. 652, id. A96. DOI: [10.1051/0004-6361/202141044](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202141044).
- Paxton B., Bildsten L., Dotter A., et al. Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA). *Astrophys. J. Suppl.* 2011, vol. 192, iss. 1, id. 3. DOI: [10.1088/0067-0049/192/1/3](https://doi.org/10.1088/0067-0049/192/1/3).
- Pipin V.V., Kosovichev A.G. On the origin of solar torsional oscillations and extended solar cycle. *Astrophys. J.* 2019, vol. 887, iss. 2, id. 215. DOI: [10.3847/1538-4357/ab5952](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab5952).
- Pipin V.V., Kosovichev A.G. Torsional oscillations in dynamo models with fluctuations and potential for helioseismic predictions of the solar cycles. *Astrophys. J.* 2020, vol. 900, iss. 1, id. 26. DOI: [10.3847/1538-4357/aba4ad](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aba4ad).
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes. Cambridge University Press. 1992.
- Rajaguru S.P., Antia H.M. Meridional circulation in the solar convection zone: time-distance helioseismic inferences from four years of HMI/SDO observations. *Astrophys. J.* 2015, vol. 813, iss. 2, id. 114. DOI: [10.1088/0004-637X/813/2/114](https://doi.org/10.1088/0004-637X/813/2/114).
- Rüdiger G. Differential rotation and stellar convection. *Sun and Solar-Type Stars*. Akademie-Verlag, Berlin, 1989. 328 p.
- Rüdiger G., Spahn F. On the stability of mean-field models of the solar convection zone. *Solar. Phys.* 1992, vol. 138, iss. 1, pp. 1–9. DOI: [10.1007/BF00146192](https://doi.org/10.1007/BF00146192).
- Rüdiger G., Egorov P., Kitchatinov L.L., Küker M. The eddy heat-flux in rotating turbulent convection. *Astron. Astrophys.* 2005, vol. 431, pp. 345–352. DOI: [10.1051/0004-6361:20041670](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041670).
- Saio H. R-mode oscillations in uniformly rotating stars. *Astrophys. J.* 1982, vol. 256, pp. 717–735. DOI: [10.1086/159945](https://doi.org/10.1086/159945).

- Schou J., Antia H.M., Basu S., et al. Helioseismic studies of differential rotation in the solar envelope by the solar oscillations investigation using the Michelson Doppler Imager. *Astrophys. J.* 1998, vol. 505, iss. 1, pp. 390–417. DOI: [10.1086/306146](https://doi.org/10.1086/306146).
- Snodgrass H.B., Ulrich R.K. Rotation of Doppler features in the solar photosphere. *Astrophys. J.* 1990, vol. 351, pp. 309–316. DOI: [10.1086/168467](https://doi.org/10.1086/168467).
- Thompson M.J., Toomre J., Anderson E.R., et al. Differential rotation and dynamics of the solar interior. *Science*. 1996, vol. 272, iss. 5266, pp. 1300–1305. DOI: [10.1126/science.272.5266.1300](https://doi.org/10.1126/science.272.5266.1300).

- Tuominen I., Brandenburg A., Moss D., Rieutord M. Does solar differential rotation ARISE from a large scale instability? *Astron. Astrophys.* 1994, vol. 284, pp. 259–264.

Как цитировать эту статью:

- Кичатинов Л.Л. Модель крупномасштабных течений в конвективных зонах Солнца и звезд. *Солнечно-земная физика*. 2025, т. 11, № 4, с. 5–16. DOI: [10.12737/szf-114202501](https://doi.org/10.12737/szf-114202501).

ПРИЛОЖЕНИЕ

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОРОИДАЛЬНОЙ И ПОЛОИДАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ ТЕЧЕНИЯ

В символьном виде уравнение для тороидальной составляющей течения можно записать как $r\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \text{Уравнение (2)})$. В представлении через скалярные потенциалы течения (18) и новые зависимые переменные (22) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{L}W)}{\partial t} = & \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[v \rho r \hat{L}(rU - 2W) \right] + \frac{v}{r^2} (\hat{L} + 2) (\hat{L}W) + \\ & + \Omega \hat{L} \left\{ \frac{\cos^3 \vartheta}{3 \rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^3 \Lambda_1) - \frac{\cos \vartheta}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^3 \Lambda_0) + \cos \vartheta (1 - 5 \cos^2 \vartheta / 3) \Lambda_1 \right\} - \\ & - 2\Omega \left\{ \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(Q + \frac{\hat{L}V}{r \rho} \right) - \cos \vartheta \left(\hat{L}Q - 2 \frac{\hat{L}V}{r \rho} \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{r^2 \rho} \left\{ (\hat{L}W) \frac{\partial(\hat{L}V)}{\partial r} - (\hat{L}V) \frac{\partial(\hat{L}W)}{\partial r} + \frac{\partial(\hat{L}W)}{\partial \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial r} - \frac{\partial(\hat{L}V)}{\partial \vartheta} \frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta \partial r} \right\} + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial(\hat{L}W)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \frac{\partial(\hat{L}W)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\hat{L}V)}{\partial \varphi} \frac{\partial D}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\hat{L}V)}{\partial \vartheta} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \right\} + \\ & + \frac{1}{r^2 \rho \sin^2 \vartheta} \left\{ \frac{\partial(\hat{L}W)}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\partial(\hat{L}V)}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial r} \right\}. \end{aligned}$$

Два первых слагаемых в правой части дают вклад турбулентной вязкости. Следующее слагаемое в фигурных скобках учитывает Λ -эффект, далее в фигурных скобках — сила Кориолиса, остальная часть уравнения — вклад нелинейности. Заметим, что при использовании новых зависимых переменных (22) в уравнении присутствуют производные лишь первого порядка по радиусу, для чего новые переменные и были введены.

Символьная запись уравнения для полоидального течения $r\mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \text{Уравнение (2)})]$ сложнее, чем для тороидального. Соответственно, и уравнение в потенциалах получается более громоздким:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\hat{L}D)}{\partial t} = & \hat{L}^2 \left\{ \frac{v}{r^2} D + \frac{2v + \mu}{\rho^3 r^2} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 V - \frac{2}{\rho^2} \frac{d(\rho v)}{dr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r^2} \right) \right\} + \hat{L} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{g}{c_p} \hat{L}S - \\ & - 2\Omega \left\{ \frac{\partial D}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho r^2} \frac{d\rho}{dr} \frac{\partial(\hat{L}V)}{\partial \varphi} - \cos \vartheta \hat{L}U + \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \hat{L} \left(\sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) \right\} + \\ & + \frac{1}{r^2} \hat{L} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \frac{\partial D}{\partial \vartheta} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \frac{\partial D}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2} \hat{L} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial D}{\partial \vartheta} - \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\hat{L} W \right)^2 - \frac{1}{\rho} \left(\hat{L} D \right) \left(\hat{L} V \right) + \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \frac{\partial \left(\hat{L} W \right)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial D}{\partial \vartheta} \frac{\partial \left(\hat{L} V \right)}{\partial \vartheta} \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial \left(\hat{L} W \right)}{\partial \varphi} \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \left(\hat{L} W \right)}{\partial \vartheta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \left(\hat{L} V \right)}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \frac{\partial \left(\hat{L} V \right)}{\partial \varphi} \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \left(\hat{L} W \right)}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial \left(\hat{L} V \right)}{\partial \varphi} \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь $F = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v D)}{\partial r} + \frac{2}{\rho r} \frac{d(\rho v)}{dr} \left(Q + \frac{\hat{L} V}{\rho r} \right)$ — еще одна зависимая переменная в дополнение к (22). Вклад энтропии учитывает бароклиный источник полоидального течения.