

ЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ВИХРЯ, ГЕНЕРИРУЕМОГО ЛОКАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ*

LINEAR EVOLUTION OF THE VORTEX INDUCED BY LOCALIZED TEMPERATURE DISTURBANCE IN STRATIFIED SHEAR FLOW*

И.Г. Шухман

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, shukhman@iszf.irk.ru*

Ш. Вайс Тевнер

*Технион – Израильский институт технологий,
Хайфа, Израиль, shoshanaw@gmail.com*

Я. Коэн

*Технион – Израильский институт технологий,
Хайфа, Израиль, aerycyc@aerodyne.technion.ac.il*

I.G. Shukhman

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, shukhman@iszf.irk.ru*

S. Weiss Tewner

*Technion – Israel Institute of Technology,
Haifa, Israel, shoshanaw@gmail.com*

J. Cohen

*Technion – Israel Institute of Technology,
Haifa, Israel, aerycyc@aerodyne.technion.ac.il*

Аннотация. Исследуется влияние сдвига скорости течения и его устойчивой вертикальной стратификации на эволюцию вихревого возмущения, индуцированного компактным возмущением температуры, наложенным в начальный момент времени на некоторую локальную область течения. Малые размеры возмущения по сравнению с характерными масштабами изменения скорости и температуры фонового течения позволяют считать вертикальные градиенты горизонтальной скорости течения и температуры не зависящими от координат. В рамках линейной теории рассчитаны поля завихренности и температуры. Задача решается аналитически с помощью трехмерного фурье-преобразования исходной системы и дальнейшего перехода к лагранжевым переменным в фурье-пространстве. Показано, что рост интенсивности вихря вызывается как стратификацией, так и сдвигом скорости. Однако характер этого усиления (монотонный или осциллирующий) зависит от того, какой из двух факторов доминирует. В случае, когда диссипативные эффекты отсутствуют, энтрофия растет неограниченно (в рамках линейной теории), однако диссипативные факторы (вязкость и термодиффузия) модифицируют этот рост и делают его только транзитным (временным), так что в конце концов возмущение затухает. Область возмущения растягивается вдоль направления течения, однако ее вертикального и горизонтального смещения как целого в рамках линейной теории не происходит, поскольку это нелинейные эффекты. Нелинейные эффекты рассмотрены нами в отдельной работе.

Ключевые слова: сдвиговое течение, стратификация, эволюция возмущений, энтрофия, циркуляция.

Abstract. We study the combined effect of the shear flow velocity and its (stable) vertical stratification on the evolution of the three-dimensionally localized vortical disturbance induced by the initial temperature perturbation embedded at the initial time into a local region of the flow. Small geometric scales of perturbations compared to the characteristic scales of velocity and temperature variation of the background flow allow to consider vertical gradients of the horizontal velocity and temperature to be not dependent on the coordinates. Assuming a disturbance sufficiently weak, we use linear theory to calculate fields of vorticity and temperature. The problem is solved analytically using a three-dimensional Fourier transform of the basic set of equations and further transition to a Lagrange variables in the Fourier space. It is shown that the growth of the intensity of the vortex (a measure of which are enstrophy and circulation) is obliged to both stratification and shear. However, the character of this growth (monotonous or oscillating) depends on what of two factors dominates. In the case where the dissipation effects are negligible, enstrophy grows indefinitely (in the framework of the linear theory), but dissipative factors (viscosity and thermal diffusivity) modified this growth and make it only transient, so that eventually the perturbation decays. Perturbation domain stretches along the direction of flow, but its vertical and horizontal movement as a whole in the framework of the linear theory doesn't occur, since it is the nonlinear effect. Nonlinear evolution of the vortex induced by temperature disturbance is considered in a separate paper.

Keywords: shear flow, stratification, evolution of disturbances, enstrophy, circulation.

* На английском языке статья опубликована в журнале «Physics of Fluids». 2015. V. 27. 024103. На русском языке публикуется впервые по лицензии издательства AIP Publishing LLC.

Reprinted with permission from Ilia G. Shukhman, Shoshana Weiss Tewner and Jacob Cohen, Vortical disturbances in a linearly stratified linear shear flow. I. Linear theory. Physics of Fluids, 27, 024103 (2015). © 2015, AIP Publishing LLC.

1. ВВЕДЕНИЕ

Течения, индуцированные эффектами плавучести, носят как естественный, так и техногенный характер. Примерами могут служить выбросы газов из заводских выхлопных труб, сброс сточных вод в реки, разливы нефти в океанах и т. д. Все эти течения включают две составляющие: первичное, фоновое, течение и вторичный поток, инжектированный в первичное течение, или возмущение, помещенное внутри первичной среды. Эффекты плавучести проявляются благодаря разнице в температурах или благодаря смешиванию разных жидкостей (например, океанические течения с различной соленостью). Согласно [Тернер, 1977], в случае, когда вторичный поток инжектируется непрерывно, течение классифицируется как плум (plume — шлейф). В случае же, когда он инжектируется дискретно или периодически, течение называют «термиком» (thermal) или «плавучим возмущением» (buoyant disturbance). В данной работе мы будем говорить только о термиках (плавучих возмущениях). Мы будем рассматривать генерацию вихря как результат начальной разности температур (а не как прямое следствие переменной плотности). Примером может служить капля нагретой воды в воде комнатной температуры (но не капля соленой воды в пресной воде). Основным интерес исследователей вызывают такие характеристики термиков, как циркуляция скорости в них, высота подъема, геометрическая форма.

В этой работе мы изучаем эволюцию трехмерно локализованного вихря в сдвиговом течении стратифицированной жидкости, генерированного начальным компактным возмущением температуры. Развитие такого вихря управляется двумя факторами: плавучестью и сдвигом скорости невозмущенного течения. Вихри, вызванные эффектом плавучести, изучались многими исследователями. Прекрасный обзор этих работ содержится в книге [Тернер, 1977]. Результаты более поздних исследований довольно подробно описаны в вступительном разделе статьи [Weiss Tewner et al., 2015]. Отметим, что в основном изучалось поведение вихрей, вызванных эффектом плавучести, в покоящейся среде или в движущейся среде, но без сдвига скорости. Вопрос о совместном влиянии стратификации и сдвига скорости (шира) на динамику вихря до сих пор изучен недостаточно. Настоящая работа является попыткой восполнить этот пробел. Мы ограничиваемся случаем достаточно слабых возмущений и будем использовать только линейную теорию. Более общий случай нелинейного развития вихря при наличии плавучести и шира рассмотрен нами в статье [Weiss Tewner et al., 2015].

В стратифицированной среде есть две причины для плавучести. Первая связана с тем, что температура возмущения выше или ниже, чем температура окружения (соответственно плотность меньше или больше, чем плотность окружающей жидкости). В этом случае эффект плавучести присутствует даже в нестратифицированной (изотермической) среде. Сила плавучести в данном случае обусловлена исключительно свойствами самого возмущения. Харак-

терный масштаб времени, связанный с плавучестью этого типа, $\tau_B = \Delta^2 / \sqrt{F_0}$, где F_0 — начальная сила плавучести, деленная на ρ_{b0} :

$$F_0 = |g(\delta\rho_0 / \rho_{b0})\Delta^3| = |g\hat{\beta}\delta T_0\Delta^3|.$$

Здесь ρ_{b0} — плотность фоновой среды, Δ — характерный размер локализованного возмущения, δT_0 — начальное возмущение температуры, $\delta\rho_0 = -\rho_{b0}\hat{\beta}\delta T_0$ — соответствующее возмущение плотности, а $\hat{\beta} > 0$ — коэффициент теплового расширения. Следовательно, масштаб времени плавучести есть

$$\tau_B = \sqrt{\Delta / (g\hat{\beta}\delta T_0)}.$$

Мы будем называть плавучесть такого типа внутренней плавучестью, чтобы подчеркнуть ее отношение к характеристикам самого возмущения, а не к свойствам окружающей среды.

Плавучесть второго типа полностью обусловлена свойствами фоновой среды. Здесь мы рассматриваем только устойчивую стратификацию, т. е. $d\rho_b/dy < 0$ или $dT_b/dy > 0$, где y — вертикальная координата, положительное направление которой противоположно направлению ускорения силы тяжести $\mathbf{g}$, а $\rho_b(y)$ и $T_b(y)$ — фоновые плотность и температура соответственно. В этом случае характерное время плавучести (τ_{ST}) есть обратная частота Бранта–Вэйсяля $\tau_{ST} = 1/N$, где $N = \sqrt{-g\rho'_b / \rho_{b0}} = \sqrt{g\hat{\beta}T'_b}$. Мы будем называть плавучесть этого типа внешней плавучестью, чтобы подчеркнуть, что она обусловлена свойствами фоновой среды, а не свойствами возмущения. Наряду с временными масштабами τ_B и τ_{ST} существует также шировый масштаб, связанный со сдвигом скорости: $\tau_s = 1/\Omega$, где $\Omega = |dU_x / dy|$ — величина завихренности фонового течения.

Для данного начального возмущения температуры (плотности) в стратифицированном течении имеют место оба типа плавучести — внешняя и внутренняя. В этом случае доминирует тот тип плавучести, характерный временной масштаб которого меньше. Если $\tau_{ST}/\tau_B \equiv 1/(N\tau_B) \ll 1$, внешняя плавучесть строго доминирует и мы можем пренебречь эффектами внутренней плавучести. Более того, при условии, что шировое время τ_s сравнимо со временем внешней плавучести τ_{ST} , задача может рассматриваться в линейном приближении. Другими словами, можно показать, что при таких условиях нелинейные члены в исходных уравнениях много меньше линейных. Введя безразмерный параметр $\varepsilon_{ST} \equiv (\tau_{ST}/\tau_B)^2 = 1/(N\tau_B)^2 = \delta T_0 / (T'_b \Delta)$, мы можем сформулировать условие применимости линейного приближения в виде $\varepsilon_{ST} \ll 1$ и $\tau_{ST} \sim \tau_B$. Это означает, что возмущение температуры δT_0 должно быть много меньше, чем перепад фоновой температуры между верхней и нижней границами возмущенной области, $\Delta T \sim T'_b \Delta$, т. е. $\delta T_0 \ll \Delta T$.

Тем не менее возможно считать задачу линейной даже для случаев очень слабой или полностью отсутствующей стратификации сдвигового течения,

для которого $\varepsilon_{ST} \rightarrow \infty$. В этих случаях условием линейности является малость отношения ширового времени к времени плавучести, т. е. малость параметра $\varepsilon_S = (\tau_S/\tau_B)^2 \equiv 1/(\Omega\tau_B)^2$, $\varepsilon_S \ll 1$. И, наконец, когда оба параметра ε_S , $\varepsilon_{ST} \rightarrow \infty$, единственным временным масштабом в задаче остается масштаб внутренней плавучести τ_B . В этом случае линейное приближение работает в течении для промежутка времени t , для которого $t \ll \tau_B$. Суммируя условия, сформулированные выше, можно сказать, что применение линейной теории оправданно, если амплитуда начального возмущения температуры δT_0 достаточно мала, т. е.

$$\min\{\varepsilon_{ST}, \varepsilon_S, (t/\tau_B)^2\} \ll 1,$$

и до тех пор пока она остается таковой в ходе эволюции. В настоящей работе мы рассматриваем только линейный случай, когда внешняя плавучесть доминирует над внутренней плавучестью (или, наоборот, доминирует внутренняя плавучесть, но время t от начала эволюции много меньше, чем τ_B). Другой случай, когда внутренняя плавучесть более существенна, чем внешняя, рассматривается в нашей статье [Weiss Tewner et al., 2015], где обсуждаются нелинейные аспекты проблемы.

Далее мы показываем, что описание линейной эволюции вихря, индуцированного начальным возмущением температуры в стратифицированном сдвиговом течении, может быть выполнено аналитическими средствами до тех пор, пока размер возмущенной области в вертикальном направлении остается достаточно компактным. В этом случае вертикальные градиенты невозмущенных скорости и температуры могут считаться постоянными вдоль высоты возмущения, т. е. невозмущенные скорость и температура могут рассматриваться как линейные функции вертикальной координаты y . Более того, компактность возмущения позволяет считать фоновое течение и поле температуры безграничными. Следовательно, исходная сложная задача сводится к более простой задаче исследования эволюции 3D-возмущения в безграничном течении Куэтта линейно стратифицированной жидкости. Начальная геометрия задачи показана на рис. 1.

Математически задача решается переходом к фурье-представлению и последующим переходом к лагранжевым переменным в фурье-пространстве.

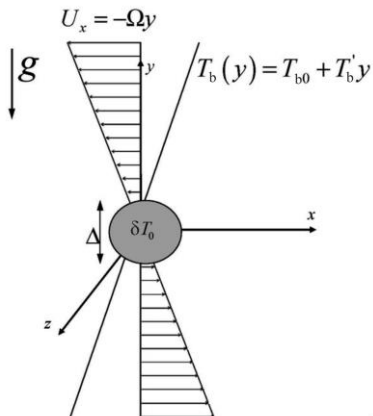


Рис 1. Схема постановки задачи

Получающаяся при этом система уравнений решается аналитически или почти аналитически, в зависимости от конкретного профиля невозмущенной скорости. Обратное фурье-преобразование позволяет вычислить распределение полей возмущенных величин в реальном (физическом) пространстве. Такой подход применялся нами ранее при изучении эволюции локализованного 3D-вихря в нестратифицированном течении Куэтта [Шухман, Левинский, 2003], а также в круговом [Шухман, Левинский, 2004; Shukhman, Levinski, 2005], гиперболическом [Шухман, 2007; Shukhman, 2006] и эллиптическом [Шухман, 2006; Shukhman, 2007] течениях. Свойство линейности зависимости профилей скорости от декартовых координат (как и свойство линейной стратификации фоновой плотности или температуры) неоднократно эксплуатировалось в литературе (см., например, [Craig, 1989; Craig, Criminale, 1986; Craig, Allen, 1992; Majda, Shefter, 1998; Bayly, 1986; Lagnado et al., 1984; Farrel, Ioannou, 1992]), начиная с пионерной работы Кельвина [Thomson, 1887], хотя в этих работах метод применялся для одиночной волны, а не для локализованного трехмерного возмущения. Обобщение описанного метода Лагранжа на нелинейный случай возможно только в численном варианте, в отличие от аналитического анализа, допускаемого в линейной теории. Эта процедура была реализована для нестратифицированного течения в нашей недавней работе [Cohen et al., 2010]. Существенное математическое различие между линейной и нелинейной реализацией лагранжевой техники состоит в том, что в линейной задаче нет необходимости в решении эволюционных уравнений в фурье-пространстве. Иными словами, мы можем почти аналитически получить решение в произвольный момент времени t без того, чтобы знать решение в предшествующие моменты времени. Для нелинейной задачи, однако, мы должны знать всю предысторию, начиная от $t=0$ и вплоть до текущего момента t , решая численно систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (например, методом Эйлера [Cohen et al., 2010]).

Структура статьи такова. Постановка задачи сформулирована в разделе 2, где мы также приводим исходные уравнения для возмущений температуры и завихренности в безразмерном виде, описываем процедуру решения этих уравнений, предварительно перейдя к фурье-представлению, и выполняем обратное преобразование Фурье, чтобы получить поля возмущенных величин в физическом пространстве. В разделе 3 рассчитана эволюция полей температуры и завихренности для случая, когда диссипативные факторы отсутствуют, а в разделе 4 учтена роль диссипативных эффектов. Результаты представлены в разделе 5. Они включают описание поведения полной энтропии (подраздел 5.1) и циркуляции (подраздел 5.2) в диссипативном и бездиссипативном случаях, а также динамику 3D-полей температуры и плотности энтропии (в бездиссипативном случае) при отсутствии шира (подраздел 5.3) и при его наличии (подраздел 5.4). В разделе 6 мы суммируем результаты и делаем заключительные замечания. В приложении приводятся асимптотические выражения для функций, описывающих решения в двух предельных случаях.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Исходные уравнения

Мы начнем с системы линеаризованных уравнений в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{\nabla p}{\rho_{b0}} g \hat{\beta} T \mathbf{e}_2 + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T_b = \alpha \nabla^2 T, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ — скорость невозмущенного течения, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — возмущенная скорость, ρ_{b0} — значение фоновой плотности в центре начальной возмущенной области, которая предполагается сферически-симметричной, причем будем считать, что положение ее центра совпадает с уровнем $y=0$, где скорость равна нулю. $T(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$ — возмущения температуры и давления, ν и α — коэффициенты кинематической вязкости и термодиффузии соответственно, $\hat{\beta}$ — коэффициент теплового расширения, $\mathbf{e}_2$ — единичный вектор вдоль положительного направления оси $x_2 \equiv y$ и g — абсолютное значение гравитационного ускорения $\mathbf{g}$ (в отрицательном направлении оси y , т. е. $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_2$). Предполагается, что полные скорость, температура, плотность и давление представлены как суммы невозмущенных полей ($\mathbf{U}(y)$, $T_b(y)$, $\rho_b(y)$, $p_b(y)$) и соответствующих полей возмущений ($\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$). Кроме того, градиенты невозмущенных плотности и температуры предполагаются постоянными, т. е. $\rho_b(y) = \rho_{b0} + \rho'_b y$, $\rho'_b = \text{const}$, $T_b(y) = T_{b0} + T'_b y$, $T'_b = \text{const}$, так что $\rho'_b/\rho_{b0} = -\hat{\beta} T'_b$, $\rho/\rho_{b0} = -\hat{\beta} T$.

При выводе уравнения (2.1) из точного уравнения Навье–Стокса мы использовали условие баланса сил в вертикальном направлении в невозмущенном течении, предполагая, что пространственные вариации плотности и температуры малы, так что мы можем учитывать только линейные части их тейлоровских разложений (на размере возмущения Δ), т. е. $\rho'_b(y)/\rho_{b0} = -g$. Для случая безграничного течения Куэтта имеем $\mathbf{U} = (-\Omega y, 0, 0)$, так что невозмущенная завихренность предполагается постоянной: $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{U} = (0, 0, \Omega)$.

Для возмущений завихренности $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ и температуры мы получаем из (2.1) и (2.2):

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{U} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + g \hat{\beta} \operatorname{rot} (T \mathbf{e}_2), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) T + T'_b u_2 = \alpha \nabla^2 T. \quad (2.5)$$

Обозначая $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$, запишем уравнения для компонент завихренности и температуры:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} - \Omega \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \nu \nabla^2 \omega_1 - g \hat{\beta} \frac{\partial T}{\partial x_3}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \Omega \omega_1 - \Omega \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \nu \nabla^2 \omega_2, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \Omega \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nu \nabla^2 \omega_3 + g \hat{\beta} \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + T'_b u_2 = \alpha \nabla^2 T, \quad (2.9)$$

где мы использовали соотношения $\partial u_1/\partial x_3 = \omega_2 + \partial u_3/\partial x_1$ и $\partial u_2/\partial x_3 = -\omega_1 + \partial u_3/\partial x_2$. Далее определим безразмерные переменные и выявим управляющие параметры задачи. Имеем

$$t = \tau / N, \quad x_j = l \bar{x}_j, \quad u_j = (lN) \bar{u}_j, \quad \omega_j = N \bar{\omega}_j,$$

$$T = T_{b0} \bar{T}, \quad \Omega = N \bar{\Omega}, \quad \nu = N l^2 \bar{\nu}, \quad \alpha = N l^2 \bar{\alpha}, \quad (2.10)$$

где τ , $\bar{x}_j$, $\bar{u}_j$, $\bar{\Omega}$, $\bar{\omega}_j$, $\bar{T}$, $\bar{\nu}$ и $\bar{\alpha}$ — безразмерные переменные, а $\bar{x}_1 \equiv \bar{x}$, $\bar{x}_2 \equiv \bar{y}$, $\bar{x}_3 \equiv \bar{z}$. Основным управляющим параметром задачи является параметр

$$\bar{\Omega} = \frac{\tau_{ST}}{\tau_s} = \frac{\Omega}{N} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Ri}}}, \quad (2.11)$$

представляющий собой отношение двух временных масштабов — временного масштаба, определяемого внешней плавучестью (т. е. стратификацией невозмущенной среды), $\tau_{ST} = N^{-1}$ и ширового времени $\tau_s = \Omega^{-1}$. Число Ричардсона (Ri) определяется как

$$\operatorname{Ri} = (g | \rho'_b | / \rho_{b0}) / (dU / dy)^2 = N^2 / \Omega^2 = 1 / \bar{\Omega}^2 = g \hat{\beta} T'_b / \Omega^2.$$

И, наконец, перепишем систему уравнений (2.6)–(2.9) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \tau} - \bar{\Omega} \bar{x}_2 \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \bar{x}_1} - \bar{\Omega} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_1} = \bar{\nu} \bar{\nabla}^2 \bar{\omega}_1 - \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_3}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \tau} - \bar{\Omega} \bar{x}_2 \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \bar{x}_1} + \bar{\Omega} \bar{\omega}_1 - \bar{\Omega} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_2} = \bar{\nu} \bar{\nabla}^2 \bar{\omega}_2, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}_3}{\partial \tau} - \bar{\Omega} \bar{x}_2 \frac{\partial \bar{\omega}_3}{\partial \bar{x}_1} - \bar{\Omega} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} = \bar{\nu} \bar{\nabla}^2 \bar{\omega}_3 + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_1}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} - \bar{\Omega} \bar{x}_2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}_1} + \bar{u}_2 = \bar{\alpha} \bar{\nabla}^2 \bar{T}. \quad (2.15)$$

2.2. Исходные уравнения в фурье-пространстве

Далее перейдем к фурье-представлению (к $\mathbf{k}$ -пространству), где $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Чтобы избежать введения новых символов, мы будем отмечать фурье-трансформированные величины только их аргументами, сохраняя для самих величин те же буквы, т. е. фурье-трансформанты компонент завихренности $\bar{\omega}_j(\bar{\mathbf{x}})$, компонент скорости $\bar{u}_j(\bar{\mathbf{x}})$ и температуры обозначаются как $\bar{\omega}_j(\mathbf{k})$, $\bar{u}_j(\mathbf{k})$ и $\bar{T}(\mathbf{k})$ соответственно. Таким образом,

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = \int f(\mathbf{k}) \exp(i \mathbf{k} \bar{\mathbf{x}}) d^3 k,$$

$$f(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int f(\bar{\mathbf{x}}) \exp(-i \mathbf{k} \bar{\mathbf{x}}) d^3 \bar{\mathbf{x}}.$$

Трансформированная система уравнений (2.12)–(2.15) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k \bar{\omega}_1(\mathbf{k}) + \bar{\Omega} \frac{k_1}{k^2} [k_1 \bar{\omega}_2(\mathbf{k}) - k_2 \bar{\omega}_1(\mathbf{k})] = \\ = -\bar{\nu} k^2 \bar{\omega}_1(\mathbf{k}) - i k_3 \bar{T}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k \bar{\omega}_2(\mathbf{k}) + \bar{\Omega} \bar{\omega}_1(\mathbf{k}) + \bar{\Omega} \frac{k_2}{k^2} [k_1 \bar{\omega}_2(\mathbf{k}) - k_2 \bar{\omega}_1(\mathbf{k})] = \\ = -\bar{\nu} k^2 \bar{\omega}_2(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k \bar{\omega}_3(\mathbf{k}) + \bar{\Omega} \frac{k_3}{k^2} [k_1 \bar{\omega}_2(\mathbf{k}) - k_2 \bar{\omega}_1(\mathbf{k})] = \\ = -\bar{\nu} k^2 \bar{\omega}_3(\mathbf{k}) + i k_1 \bar{T}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k \bar{T}(\mathbf{k}) + \frac{i}{k^2} [k_3 \bar{\omega}_1(\mathbf{k}) - k_1 \bar{\omega}_3(\mathbf{k})] = \\ = -\bar{\alpha} k^2 \bar{T}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где обозначено $\mathcal{L}_k = \partial / \partial \tau + \bar{\Omega} k_1 \cdot \partial / \partial k_2$, $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Мы использовали соотношение $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) = i k^{-2} [\mathbf{k} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k})]$, связывающее фурье-компоненты скорости и завихренности.

2.3. Переход к лагранжевым переменным в $\mathbf{k}$ -пространстве

Представление линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_k = \partial / \partial \tau + \bar{\Omega} k_1 \cdot \partial / \partial k_2$ в форме

$$\mathcal{L}_k = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{dk_1}{d\tau} \frac{\partial}{\partial k_1} + \frac{dk_2}{d\tau} \frac{\partial}{\partial k_2} + \frac{dk_3}{d\tau} \frac{\partial}{\partial k_3}$$

позволяет легко понять, что уравнения траектории в $\mathbf{k}$ -пространстве есть

$$\frac{dk_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dk_2}{d\tau} = \bar{\Omega} k_1, \quad \frac{dk_3}{d\tau} = 0. \quad (2.20)$$

Это позволяет выразить зависящий от времени волновой вектор $\mathbf{k}(\tau)$ через его начальное значение $\mathbf{q}$, т. е. $\mathbf{k}(0) = \mathbf{q}$. Будем рассматривать переменные $k_j(\tau)$ как лагранжевы переменные для невозмущенной траектории в $\mathbf{k}$ -пространстве, которая начинается в момент $\tau=0$ от точки $\mathbf{q}$ в фурье-пространстве. Таким образом можно перейти от набора четырех независимых переменных $(\tau; k_1, k_2, k_3)$ к набору $(\tau; q_1, q_2, q_3)$, где, согласно (2.20),

$$k_1(\tau) = q_1, \quad k_2(\tau) = q_2 + \bar{\Omega} \tau q_1, \quad k_3(\tau) = q_3. \quad (2.21)$$

В новых переменных оператор $\mathcal{L}_k$ превращается в производную по времени вдоль траектории в $\mathbf{k}$ -пространстве $\mathcal{L}_k = d/d\tau$, где производная по времени берется при фиксированном начальном значении вектора $\mathbf{k}$, т. е. при фиксированном $\mathbf{q}$. Мы будем также обозначать

$$\bar{\omega}_j(\tau, \mathbf{k}(\mathbf{q}, \tau)) = \zeta_j(\mathbf{q}, \tau), \quad \bar{T}(\tau, \mathbf{k}(\mathbf{q}, \tau)) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau).$$

Следовательно, система уравнений (2.16)–(2.19) переходит в систему уравнений

$$\frac{d\zeta_1(\mathbf{q}, \tau)}{d\tau} = -\bar{\Omega} k^{-2} k_1 [k_1 \zeta_2(\mathbf{q}, \tau) -$$

$$-k_2 \zeta_1(\mathbf{q}, \tau)] - \bar{\nu} k^2 \zeta_1(\mathbf{q}, \tau) - i k_3 \mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau), \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_2(\mathbf{q}, \tau)}{d\tau} = -\bar{\Omega} \zeta_1(\mathbf{q}, \tau) - \bar{\Omega} k^{-2} k_2 \times \\ \times [k_1 \zeta_2(\mathbf{q}, \tau) - k_2 \zeta_1(\mathbf{q}, \tau)] - \bar{\nu} k^2 \zeta_2(\mathbf{q}, \tau), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_3(\mathbf{q}, \tau)}{d\tau} = -\bar{\Omega} k^{-2} k_3 [k_1 \zeta_2(\mathbf{q}, \tau) - \\ - k_2 \zeta_1(\mathbf{q}, \tau)] - \nu (k_1^2 + k_2^2) \zeta_3(\mathbf{q}, \tau) + \\ + i k_1 \mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau)}{d\tau} + \frac{i}{k^2} [k_3 \zeta_1(\mathbf{q}, \tau) - k_1 \zeta_3(\mathbf{q}, \tau)] = \\ = \bar{\alpha} k^2 \mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где компоненты вектора $\mathbf{k}$ зависят от времени, т. е. $k_j = k_j(\mathbf{q}, \tau)$.

2.4. Начальное возмущение температуры

Мы рассматриваем простое начальное возмущение температуры, имеющее сферически-симметричную гауссову форму:

$$T(\mathbf{x}, 0) = \delta T_0 \exp(-\mathbf{x}^2 / \Delta^2).$$

В безразмерных переменных

$$\bar{T}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \bar{T}_0 \exp(-\bar{\mathbf{r}}^2 / \delta^2), \quad (2.26)$$

где $\bar{\mathbf{r}} = |\bar{\mathbf{x}}|$, $\delta = \Delta / l$, $\bar{T}_0 = \delta T_0 / T_{b0}$. В фурье-представлении

$$\bar{T}(\mathbf{k}, 0) = \bar{T}(\mathbf{q}, 0) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, 0) = \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-q^2 \delta^2 / 4}, \quad (2.27)$$

где $q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$. Заметим, что положительное значение $\bar{T}_0$ соответствует положительному начальному возмущению температуры $T(\mathbf{x}, 0) > 0$ или отрицательному возмущению плотности $\rho(\mathbf{x}, 0) / \rho_{b0} = -\beta T(\mathbf{x}, 0) < 0$. Следует также заметить, что для справедливости линейного тейлоровского разложения невозмущенной температуры, т. е. возможности представления $T_b(y) = T_{b0} + T'_b y$, мы должны предполагать, что вертикальный размер возмущения много меньше, чем масштаб l , характеризующий вариацию температуры в невозмущенном течении. В частности, начальный размер возмущения Δ должен быть много меньше, чем l ($\Delta \ll l$), и, следовательно, $\delta \ll 1$. Кроме того, поскольку мы интересуемся случаем, когда начального возмущения завихренности нет, мы полагаем $\zeta_j(\mathbf{q}, \tau=0) = 0$.

2.5. Вычисление температуры и завихренности в физическом пространстве

Компоненты завихренности $\bar{\omega}_j(\bar{\mathbf{x}}, \tau)$ и температуры $\bar{T}(\bar{\mathbf{x}}, \tau)$ в физическом пространстве получают с помощью обратного фурье-преобразования:

$$\bar{\omega}_j(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \int d^3 k \bar{\omega}_j(\mathbf{k}, \tau) \exp(i \mathbf{k} \bar{\mathbf{x}}),$$

$$\bar{T}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \int d^3k \bar{T}(\mathbf{k}, \tau) \exp(i\mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}). \quad (2.28)$$

Чтобы выполнить интегрирование по $\mathbf{q}$ вместо интегрирования по $\mathbf{k}$, мы используем свойство несжимаемости $d^3k = d^3q$ и соотношение $\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{s}$, где $\mathbf{s}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) \equiv (s_1, s_2, s_3)$ — координаты начального положения жидкой частицы, которая в момент времени τ находится в точке $\bar{\mathbf{x}}$. В явном виде

$$s_1 = \bar{x}_1 + (\bar{\Omega}\tau)\bar{x}_2, \quad s_2 = \bar{x}_2, \quad s_3 = \bar{x}_3.$$

Следовательно, выражения (2.28) становятся

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_j(\bar{\mathbf{x}}, \tau) &= \int d^3q \zeta_j(\mathbf{q}, \tau) e^{i\mathbf{q}\mathbf{s}(\bar{\mathbf{x}}, \tau)} = \\ &= \int d^3q \zeta_j(\mathbf{q}, \tau) e^{i[q_1(\bar{x}_1 + \bar{\Omega}\tau\bar{x}_2) + q_2\bar{x}_2 + q_3\bar{x}_3]}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) &= \int d^3q \mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau) e^{i\mathbf{q}\mathbf{s}(\bar{\mathbf{x}}, \tau)} = \\ &= \int d^3q \mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau) e^{i[q_1(\bar{x}_1 + \bar{\Omega}\tau\bar{x}_2) + q_2\bar{x}_2 + q_3\bar{x}_3]}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

С помощью уравнений (2.29) и (2.30), а также (2.22)–(2.25) решается задача вычисления полей завихренности и температуры в физическом пространстве $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ в произвольный момент времени τ .

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В БЕЗДИССИПАТИВНОМ СЛУЧАЕ

3.1. Эволюция температуры и завихренности

Начнем с простейшего случая, для которого диссипативные эффекты исчезающе малы, т. е. $\nu = \alpha = 0$. Система уравнений (2.22)–(2.25) в этом случае сводится к системе

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = -\bar{\Omega} \frac{k_1(k_1\zeta_2 - k_2\zeta_1)}{k^2} - ik_3\mathcal{T}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\zeta_2}{d\tau} = -\bar{\Omega}\zeta_1 - \bar{\Omega} \frac{k_2(k_1\zeta_2 - k_2\zeta_1)}{k^2}, \quad (3.2)$$

$$\frac{d\zeta_3}{d\tau} = -\bar{\Omega} \frac{k_3(k_1\zeta_2 - k_2\zeta_1)}{k^2} + ik_1\mathcal{T}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\mathcal{T}}{d\tau} + \frac{i}{k^2}(k_3\zeta_1 - k_1\zeta_3) = 0. \quad (3.4)$$

Используя (2.20), определим

$$k^2(\tau) = k_\perp^2 + [q_2 + (\bar{\Omega}\tau)q_1]^2,$$

где $k_\perp^2 = k_1^2 + k_3^2 = q_1^2 + q_3^2 = q_\perp^2 = \text{const}$ — квадрат горизонтального волнового вектора. Для упрощения этой системы мы сперва используем (3.1) и (3.3), что дает

$$\frac{d}{d\tau}(k_3\zeta_1 - k_1\zeta_3) = -ik_\perp^2\mathcal{T}. \quad (3.5)$$

Далее, комбинируя (3.5) с (3.4), найдем

$$\frac{d}{d\tau}[k^2(\tau)\frac{d\mathcal{T}}{d\tau}] + k_\perp^2\mathcal{T} = 0. \quad (3.6)$$

С использованием (3.1)–(3.5) и соотношения $k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2 + k_3\zeta_3 = 0$ получим

$$\frac{d\zeta_2}{d\tau} = -i\bar{\Omega}k_3\frac{d\mathcal{T}}{d\tau},$$

что приводит к следующим выражениям для трех компонент ξ_j :

$$\zeta_2 = -i\bar{\Omega}q_3[\mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau) - \mathcal{T}(\mathbf{q}, 0)], \quad (3.7)$$

$$\zeta_1 = -\frac{k_1k_2}{k_\perp^2}\zeta_2 + ik_3\frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{d\mathcal{T}}{d\tau}, \quad (3.8)$$

$$\zeta_3 = -\frac{k_3k_2}{k_\perp^2}\zeta_2 - ik_1\frac{k^2}{k_\perp^2}\frac{d\mathcal{T}}{d\tau}. \quad (3.9)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (3.6) должно решаться при начальном условии (2.27) для температуры и условии отсутствия начальной завихренности (3.4), т. е.

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau)]_{\tau=0} &= \frac{\bar{T}_0\delta^3}{8\pi^{3/2}}\exp(-\frac{1}{4}q^2\delta^2), \\ [d\mathcal{T}(\mathbf{q}, \tau)/d\tau]_{\tau=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2. Вычисление температуры в $\mathbf{q}$ -пространстве

Уравнение (3.6) идентично уравнению (3.7) из работы [Shukhman, Levinski, 2005], описывающему линейную эволюцию локализованного вихря в течении Тейлора–Куэтта, хотя начальные условия здесь немного другие. Тем не менее мы используем тот же метод решения. Удобно использовать сферические координаты в $\mathbf{k}$ -пространстве

$$k_1 = k \cos\beta \cos\phi (= k_\perp \cos\phi), \quad k_2 = k \sin\beta,$$

$$k_3 = k \cos\beta \sin\phi (= k_\perp \sin\phi),$$

где $\beta = \beta(\tau) = \arctg[k_2(\tau)/k_\perp]$, $\tg\phi = k_3/k_\perp$ и $-\frac{1}{2}\pi \leq \beta \leq \frac{1}{2}\pi$,

$0 \leq \phi \leq \pi$. Аналогично для начального волнового вектора $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ имеем

$$q_1 = q \cos\beta_0 \cos\phi_0 = q_\perp \cos\phi, \quad q_2 = q \sin\beta_0,$$

$$q_3 = q \cos\beta_0 \sin\phi_0 = q_\perp \sin\phi,$$

где $\beta_0 = \arctg(q_2/q_\perp)$, $\tg\phi_0 = q_3/q_\perp = k_3/k_\perp = \tg\phi$ и $-\frac{1}{2}\pi \leq \beta_0 \leq \frac{1}{2}\pi$. Это значит, что соотношения между сферическими координатами в $\mathbf{k}$ - и $\mathbf{q}$ -пространствах есть

$$\tg\beta_0 = \tg\beta - \bar{\Omega}\tau \cos\phi,$$

$$k_\perp = q_\perp = k \cos\beta = q \cos\beta_0 = \text{const}. \quad (3.11)$$

Выберем β в качестве независимой переменной вместо τ . В результате уравнение (3.6) заменится уравнением

$$\frac{d^2\mathcal{T}}{d\beta^2} + \frac{\lambda^2}{\cos^2\beta}\mathcal{T} = 0, \quad (3.12)$$

где $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\beta)$ и $\lambda^2 = 1/(\bar{\Omega}\cos\phi)^2$, причем ϕ входит только параметрически. Уравнение (3.12) требует наложения начальных условий при $\beta = \beta_0$, которые легко получить из начальных условий при $\tau = 0$. В качестве начальных условий для (3.12) имеем

$$(\mathcal{T})_{\beta=\beta_0} = \frac{T_0\delta^3}{8\pi^{3/2}}e^{-q^2\delta^2/4}, \quad (\partial\mathcal{T}/\partial\beta)_{\beta=\beta_0} = 0. \quad (3.13)$$

Решение (3.12) выражается через начальные условия (3.13) следующим образом:

$$\mathcal{T}(q, \beta_0, \phi; \tau) = [(\mathcal{T})_{\beta=\beta_0} \frac{\partial W(\beta, \beta_0)}{\partial \beta_0} - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \beta} \right)_{\beta=\beta_0} W(\beta, \beta_0)]_{\beta=\arctg(\tg \beta_0 + \bar{\Omega} \tau \cos \phi)}, \quad (3.14)$$

где $W(\beta, \beta_0; \phi) = \Psi(\beta, \phi) \Phi(\beta_0, \phi) - \Phi(\beta, \phi) \Psi(\beta_0, \phi)$, а функции $\Psi(\beta, \phi)$ и $\Phi(\beta, \phi)$ — четное и нечетное (относительно $\beta=0$) линейно независимые решения уравнения (3.12), удовлетворяющие условиям $\Psi(0, \phi) = 1$, $\Psi'(0, \phi) = 0$, $\Phi(0, \phi) = 0$, $\Phi'(0, \phi) = 1$.

Функции $\Psi(\beta, \phi)$ и $\Phi(\beta, \phi)$ могут быть найдены численно, как это описано в работе [Shukhman, Levinski, 2005]. Различные предельные случаи могут быть исследованы аналитически. Два предельных случая, наиболее важных для настоящей работы, для которых $\bar{\Omega} \ll 1$ и $\bar{\Omega} \gg 1$, описаны в приложении.

3.3. Вычисление завихренности в q -пространстве

Выражения для $\zeta_j(\mathbf{q}, \tau)$ находятся прямо из уравнений (3.7)–(3.9) и начальных условий (3.13). Обозначив (как и в [Shukhman, Levinski, 2005])

$$F_2(\beta_0, \phi, \tau) = \frac{\partial W(\beta, \beta_0, \phi)}{\partial \beta_0} \Big|_{\beta=\arctg(\tg \beta_0 + \bar{\Omega} \tau \cos \phi)},$$

$$F_4(\beta_0, \phi, \tau) = \frac{\partial^2 W(\beta, \beta_0, \phi)}{\partial \beta \partial \beta_0} \Big|_{\beta=\arctg(\tg \beta_0 + \bar{\Omega} \tau \cos \phi)}, \quad (3.15)$$

получим

$$\mathcal{T} = F_2 \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4}q^2\delta^2}, \quad (3.16)$$

$$\zeta_1 = iq\bar{\Omega} \sin \phi \cos \phi \cos \beta_0 [\tg \beta (F_2 - 1) + F_4] \times \times \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4}q^2\delta^2}, \quad (3.17)$$

$$\zeta_2 = -iq\bar{\Omega} \sin \phi \cos \beta_0 (F_2 - 1) \cdot \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4}q^2\delta^2}, \quad (3.18)$$

$$\zeta_3 = iq\bar{\Omega} \cos \beta_0 [\sin^2 \phi \tg \beta (F_2 - 1) - \cos^2 \phi F_4] \times \times \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4}q^2\delta^2}. \quad (3.19)$$

Важно заметить, что функции F_2 и F_4 зависят только от угловых переменных β_0 и ϕ и не зависят от q . Это означает, что в выражениях (3.16)–(3.19) для $\mathcal{T}$ и ζ_j зависимость от q выделена в явном виде, что позволяет выполнить аналитическое интегрирование по q при обратном фурье-преобразовании. Эта процедура выполнена в следующем подразделе.

3.4. Вычисление температуры и завихренности в физическом пространстве

Температура $\bar{T}$ и завихренность $\bar{\omega}$ в физическом пространстве вычисляются интегрированием величин $\mathcal{T}$ и ζ_j , полученных в q -пространстве, согласно (2.29) и (2.30). Эти выражения могут быть переписаны в

терминах сферических координат в $\mathbf{q}$ -пространстве как

$$\int d^3 q f(\mathbf{q}) = \int_0^\infty q^2 dq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta_0 d\beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi f(q, \beta_0, \phi).$$

Мы также выразим $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{s}) = \exp(iqs \cos \Theta_0)$, где

$$\cos \Theta_0 = \cos \theta_0 \sin \beta_0 + \sin \theta_0 \cos \beta_0 \cos(\phi - \varphi_0) \quad (3.20)$$

является косинусом угла между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{s}$, а θ_0 и φ_0 — сферические координаты в $\mathbf{s}$ -пространстве. Координаты s , θ_0 и φ_0 связаны с декартовыми координатами в $\bar{\mathbf{x}}$ -пространстве соотношениями

$$\left. \begin{aligned} s &= \sqrt{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \bar{\Omega} \tau)^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2}, \\ \cos \theta_0 &= \bar{x}_2 / s, \\ \sin \theta_0 &= \sqrt{(\bar{x}_1 + \bar{\Omega} \tau \bar{x}_2)^2 + \bar{x}_3^2} / s, \\ \sin \varphi_0 &= \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{(\bar{x}_1 + \bar{\Omega} \tau \bar{x}_2)^2 + \bar{x}_3^2}}, \\ \cos \varphi_0 &= \frac{\bar{x}_1 + \bar{\Omega} \tau \bar{x}_2}{\sqrt{(\bar{x}_1 + \bar{\Omega} \tau \bar{x}_2)^2 + \bar{x}_3^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Эти соотношения позволяют выполнить аналитическое интегрирование по q , однако интегрирование по β_0 и ϕ можно выполнить только численно.

3.4.1. Температура

Температура находится из выражений (2.30) и (3.16):

$$\bar{T}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \frac{\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos \beta_0 \times \times \int_0^{2\pi} d\phi F_2(\beta_0, \phi; \tau) \mathcal{P}(s \cos \Theta_0 / \delta), \quad (3.22)$$

где (см. [Градштейн, Рыжик, 1963] для интеграла)

$$\mathcal{P}(\xi) \equiv \int_0^\infty p^2 e^{-p^2/4} \cos(p\xi) dp = 4\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} - \xi^2 \right) e^{-\xi^2}. \quad (3.23)$$

Здесь и далее использовано свойство симметрии подынтегральных выражений $F(-\beta_0, \varphi + \pi) = F(\beta_0, \varphi)$, позволяющее уменьшить размер области интегрирования вдвое.

3.4.2. Завихренность

Компоненты завихренности получаются из (2.29) и (3.17)–(3.19):

$$\bar{\omega}_1(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = -\frac{\bar{\Omega} \bar{T}_0}{4\pi^{3/2} \delta} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^2 \beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi \cos \phi \times \times [\tg \beta (F_2(\beta_0, \phi, \tau) - 1) + F_4(\beta_0, \phi, \tau)] Q(s \cos \Theta_0 / \delta), \quad (3.24)$$

$$\bar{\omega}_2(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \frac{\bar{T}_0 \bar{\Omega}}{4\pi^{3/2} \delta} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^2 \beta_0 \times \times \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi [F_2(\beta_0, \phi, \tau) - 1] Q(s \cos \Theta_0 / \delta), \quad (3.25)$$

$$\bar{\omega}_3(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = -\frac{\bar{\Omega} \bar{T}_0}{4\pi^{3/2} \delta} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^2 \beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi \times$$

$$\times [\sin^2 \phi \operatorname{tg} \beta (F_2(\beta_0, \phi, \tau) - 1) - \cos^2 \phi F_4(\beta_0, \phi, \tau)] \times \\ \times Q(s \cos \Theta_0 / \delta), \quad (3.26)$$

где (см. [Градштейн, Рыжик, 1963] для интеграла)

$$Q(\xi) \equiv \int_0^\infty p^3 e^{-p^2/4} \sin(p\xi) dp = \\ = 8\sqrt{\pi} \xi \left(\frac{3}{2} - \xi^2 \right) e^{-\xi^2}. \quad (3.27)$$

Четыре 2D-интеграла, (3.22) для температуры и (3.24)–(3.26) для компонент завихренности по переменным β_0 и ϕ , могут быть легко найдены численно в произвольный момент времени τ . Важно отметить, что это 2D-интегрирование есть единственная процедура (кроме вычисления функций $F_{2,4}(\beta_0, \phi, \tau)$), которая выполняется численно. Следовательно, мы можем сказать, что линейная задача решается аналитически (почти) для каждого данного момента времени и не требует знания решения в предшествующие моменты.

Выражения (3.22), (3.24)–(3.26) вместе с (3.21) дают полное решение задачи нахождения температуры и завихренности в произвольной точке $\bar{\mathbf{x}}$ в любой момент времени τ .

4. ЭФФЕКТЫ ДИССИПАЦИИ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ $\text{Pr}=1$

Чтобы изучить влияние конечной вязкости и термодиффузии, модифицируем уравнения систем (3.1)–(3.4). Оператор $d/d\tau$ заменяется оператором $d/d\tau + \bar{\nu} k^2$ в уравнениях (3.1)–(3.3) и оператором $d/d\tau + \bar{\alpha} k^2$ в уравнении (3.4). Следуя процедуре, описанной в разделе 3, получаем следующее уравнение, эквивалентное уравнению (3.6):

$$(d/d\tau + \bar{\nu} k^2) \left[k^2 (d/d\tau + \bar{\alpha} k^2) \mathcal{T} \right] + p^2 \mathcal{T} = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\exp \left(-\bar{\nu} \int_0^\tau k^2(\tau') d\tau' \right) \times \\ \times \frac{d}{d\tau} \left\{ \exp \left((\bar{\nu} - \bar{\alpha}) \int_0^\tau k^2(\tau') d\tau' \right) k^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{d}{d\tau} \left[\exp \left(-\bar{\alpha} \int_0^\tau k^2(\tau') d\tau' \right) \mathcal{T} \right] \right\} + p^2 \mathcal{T} = 0.$$

К сожалению, дальнейшее аналитическое рассмотрение возможно, только если $\bar{\nu} = \bar{\alpha}$. Это означает, что число Прандтля ($\text{Pr} \equiv \nu/\alpha$) равно единице. Поэтому далее мы будем предполагать, что $\text{Pr}=1$. Отметим, что это предположение не является существенным для нашей задачи; тем не менее оно позволяет нам продвинуться в аналитическом исследовании проблемы и одновременно включить оба диссипативных фактора — вязкость и термодиффузию. Обозначив

$$\hat{\zeta}_j = \zeta_j \exp \left(\bar{\alpha} \int_0^\tau k^2(\tau') d\tau' \right),$$

$$\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \exp \left(\bar{\alpha} \int_0^\tau k^2(\tau') d\tau' \right),$$

получим для $\hat{\mathcal{T}}$ и $\hat{\zeta}_j$ те же самые соотношения, что и для переменных $\mathcal{T}$ и ζ_j в бездиссипативном случае, а именно уравнения (3.16)–(3.19). Итак, окончательные выражения для $\mathcal{T}$ и ζ_j могут быть получены умножением бездиссипативных переменных (3.16)–(3.19) на «вязкий фактор»

$$E(q, \beta_0, \phi; \tau) \equiv \exp \left(-\bar{\alpha} \int_0^\tau k^2(\tau') d\tau' \right) = \\ = \exp \left[-\bar{\alpha} q^2 \tau (1 + \bar{\Omega} \tau \sin \beta_0 \cos \beta_0 \cos \phi + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} (\bar{\Omega} \tau)^2 \sin^2 \beta_0 \cos^2 \phi) \right].$$

В итоге находим «вязкий» эквивалент системы (3.16)–(3.19):

$$\mathcal{T} = F_2 \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4} q^2 d^2}, \quad (4.1)$$

$$\zeta_1 = iq \bar{\Omega} \sin \phi \cos \phi \cos \beta_0 [\operatorname{tg} \beta (F_2 - 1) + F_4] \times \\ \times \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4} q^2 d^2}, \quad (4.2)$$

$$\zeta_2 = -iq \bar{\Omega} \sin \phi \cos \beta_0 (F_2 - 1) \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4} q^2 d^2}, \quad (4.3)$$

$$\zeta_3 = iq \bar{\Omega} \cos \beta_0 [\sin^2 \phi \operatorname{tg} \beta (F_2 - 1) - \cos^2 \phi F_4] \times \\ \times \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4} q^2 d^2}, \quad (4.4)$$

где

$$d(\beta_0, \phi, \tau) = \delta \left[1 + \frac{4\tau}{\tau_a} (1 + \bar{\Omega} \tau \sin \beta_0 \cos \beta_0 \cos \phi + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \bar{\Omega}^2 \tau^2 \cos^2 \beta_0 \cos^2 \phi) \right]^{1/2} \quad (4.5)$$

и $\tau_a = N\Delta^2/\alpha$ — характерное (безразмерное) диссипативное время. Выражения для $\bar{T}(\bar{\mathbf{x}}, \tau)$ и $\bar{\omega}_j$ в физическом пространстве в диссипативном случае имеют вид

$$\bar{T}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \frac{\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos \beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi F_2(\beta_0, \phi; \tau) \times \\ \times \mathcal{P}(s \cos \Theta_0 / d) (\delta / d)^3, \quad (4.6)$$

$$\bar{\omega}_1(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = -\frac{\bar{\Omega} \bar{T}_0}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^2 \beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi \cos \phi \times \\ \times [\operatorname{tg} \beta (F_2(\beta_0, \phi, \tau) - 1) + F_4(\beta_0, \phi, \tau)] \times \\ \times Q(s \cos \Theta_0 / d) (\delta^3 / d^4), \quad (4.7)$$

$$\bar{\omega}_2(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \frac{\bar{T}_0 \bar{\Omega}}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^2 \beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi \times \\ \times (F_2(\beta_0, \phi, \tau) - 1) Q(s \cos \Theta_0 / d) (\delta^3 / d^4), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_3(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = & -\frac{\bar{\Omega}\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^2 \beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi \left[\sin^2 \phi \times \right. \\ & \times \operatorname{tg} \beta (F_2(\beta_0, \phi, \tau) - 1) - \cos^2 \phi F_4(\beta_0, \phi, \tau) \left. \right] \times \\ & \times Q(s \cos \Theta_0 / d) (\delta^3 / d^4). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Очевидно, что в бездиссипативном пределе $\tau_a \rightarrow \infty$ мы получаем $d \rightarrow \delta$, т. е. воспроизводятся бездиссипативные выражения (3.22)–(3.27), как и должно быть.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Эволюция полной энтропии

Полная (безразмерная) энтропия $\bar{L}(\tau)$ дается выражением

$$\bar{L}(\tau) = \int d^3 \bar{\mathbf{x}} W(\bar{\mathbf{x}}, \tau),$$

где $W(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \sum_{j=1}^3 \bar{\omega}_j^2(\bar{\mathbf{x}}, \tau)$ — плотность энтропии,

начальное значение которой равно нулю, $\bar{L}(0) = 0$. В терминах фурье-переменных имеем

$$\bar{L}(\tau) = (2\pi)^3 \int d^3 q \sum_{j=1}^3 |\zeta_j(\mathbf{q}, \tau)|^2. \quad (5.1)$$

5.1.1. Бездиссипативный (невязкий) случай

Далее для краткости будем называть случай $v = \alpha = 0$ невязким. Используя выражения (3.17)–(3.19) и (5.1) для ζ_j , получаем после интегрирования по q окончательное выражение для полной энтропии вихря в виде 2D-интеграла по угловым переменным β_0 и ϕ :

$$\begin{aligned} \bar{L}(\tau) = & \frac{3}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \bar{T}_0^2 \delta \bar{\Omega}^2 \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^3 \beta_0 \times \\ & \times \int_0^{2\pi} d\phi [(F_2 - 1)^2 \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \beta} + F_4^2 \cos^2 \phi], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta_0 + \bar{\Omega} \tau \cos \phi$.

Рассмотрим два предельных случая. Для случая без шира скорости, $\bar{\Omega} \rightarrow 0$, используя асимптотические выражения для F_2 и F_4 , получаем

$$\bar{L}(\tau) = 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \bar{T}_0^2 \delta \int_0^{\pi/2} \cos \beta_0 \sin^2(\tau \cos \beta_0) d\beta_0. \quad (5.3)$$

Для случая, когда $\bar{\Omega} \gg 1$ (сильный шир скорости при фиксированной стратификации, $\Omega \gg N$, или слабая стратификация при фиксированном шире, $N \ll \Omega$), получаем

$$\begin{aligned} \bar{L}(\tau) = & \frac{3}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \frac{\bar{T}_0^2 \delta}{\bar{\Omega}^2} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^3 \beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ & \times \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{\cos^4 \phi \cos^2 \beta} \left[\ln \left| \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} \right| + (\beta - \beta_0) \operatorname{tg} \beta_0 \right]^2 + (\bar{\Omega} \tau)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Заметим, что подынтегральное выражение в (5.4) фактически не зависит от N , так как оно зависит только от $\bar{\Omega} \tau = \Omega t$. Поэтому полная безразмерная энтропия зануляется при $N \rightarrow 0$ (при фиксированном Ω). Однако размерная энтропия $L(t) = \bar{L} \cdot (N^2 l^3)$ оказывается конечной. Действительно,

$$\begin{aligned} L(t) = & \left(\frac{\delta T_0}{T_{b0}} \right)^2 \frac{N^4 l^2 \Delta}{\Omega^2} H_{\text{enst}}(\Omega t) = \\ = & (g \hat{\beta} \delta T_0)^2 \Delta \frac{H_{\text{enst}}(\Omega t)}{\Omega^2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где безразмерная функция $H_{\text{enst}}(\Omega t)$ есть

$$\begin{aligned} H_{\text{enst}}(\Omega t) = & \frac{3}{4} \sqrt{\frac{1}{2}} \pi \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^3 \beta_0 \int_0^{2\pi} d\phi \times \\ & \times \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{\cos^4 \phi \cos^2 \beta} \left[\ln \left| \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} \right| + (\beta - \beta_0) \operatorname{tg} \beta_0 \right]^2 + (\Omega t)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

с $\beta = \beta(\Omega t) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \beta_0 + \Omega t \cos \phi)$.

При $\Omega t \ll 1$ (или $t \ll 1/\Omega \ll 1/N$) получаем из (5.5) и (5.6)

$$\begin{aligned} L(t) = & \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \pi^3 (g \hat{\beta} \delta T_0)^2 \Delta \right] \times \\ & \times t^2 \left\{ 1 + \frac{1}{10} (\Omega t)^2 + O[(\Omega t)^3] \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

В частности, в случае покоящейся жидкости, $\Omega \rightarrow 0$, мы воспроизводим известный результат (см., например,

[Alon et al., 2011]) $L = \sqrt{\frac{1}{2}} \pi^3 (\Delta^3 / \tau_B^2) (t / \tau_B)^2$, пока-

зывающий, что энтропия растет как t^2 , т. е. завихренность растет линейно с t . Этот результат легко понять, если взглянуть на исходные уравнения (2.6)–(2.9), из которых следует, что в случае, когда нет шира (и стратификации), возмущение температуры не зависит от времени, $T(\bar{\mathbf{x}}, t) = T(\bar{\mathbf{x}}, 0)$, и, следовательно, индуцированная завихренность ω растет линейно со временем t .

Рисунок 2 иллюстрирует эволюцию полной энтропии, рассчитанную с помощью уравнения (5.2) при следующих значениях $\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega} \equiv \Omega / N$: 0; 0.02; 0.1; 0.5; 1; 5; 20; 50. Видно, что при фиксированной стратификации, т. е. при фиксированной частоте Бранта–Вайсяля N , усиление интенсивности вихря происходит тем быстрее, чем больше шир скорости. Для большого шира ($\bar{\Omega} \geq 1$) рост происходит монотонно, а при достаточно слабом шире ($\bar{\Omega} < 1$) короткая начальная стадия роста сопровождается осцилляциями (как и в случае без шира ($\bar{\Omega} = 0$)), после чего начинается следующая стадия, характеризующаяся монотонным ростом.

Заметим, что в случае без шира энтропия при $\tau \rightarrow \infty$ выходит на насыщение на уровне

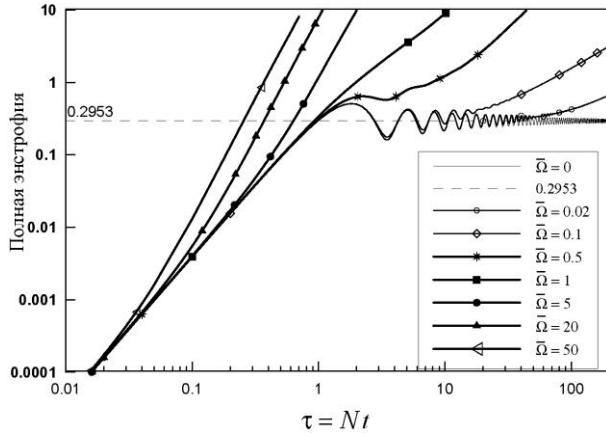


Рис. 2. Эволюция полной безразмерной энтропии $\bar{L}$ (в единицах $\bar{T}_0^2$) для восьми значений $\bar{\Omega}$ для начального гауссова распределения температуры с $\delta \equiv \Delta/l = 0.1$. Для случая без шира ($\bar{\Omega} = 0$) энтропия насыщается при $(\bar{L} / \bar{T}_0^2)_{\text{sat}} = 3/2(\pi/2)^{3/2} \cdot 0.1 \approx 0.2953$. Начальная завихренность равна нулю. Диссипативные эффекты отсутствуют ($\nu = \alpha = 0$)

$$\bar{L}_{\text{sat}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \pi \right)^{3/2} \delta \bar{T}_0^2$$

(это следует из (5.3)), а при $\bar{\Omega} \neq 0$ рост продолжается для всех τ .

Можно получить асимптотическую формулу для больших τ при произвольных $\bar{\Omega} \neq 0$. Опуская детали вычислений, приведем результат

$$\bar{L}(\tau) \approx \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \pi \right)^{3/2} \bar{\Omega}^4 \delta \cdot \bar{T}_0^2 \right] \tau^2, \quad (5.8)$$

т. е. полная энтропия $\bar{L}$ при больших τ растет как τ^2 . В размерном виде

$$\begin{aligned} L(t) &\approx \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \pi \right)^{3/2} [\delta T_0 / (T_b' \Delta)]^2 \right\} (\Omega^2 \Delta^3) (\Omega t)^2 = \\ &= \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \pi \right)^{3/2} \varepsilon_{\text{ST}}^2 \right] (\Omega^2 \Delta^3) (\Omega t)^2. \end{aligned}$$

Это асимптотическое выражение (5.8) согласуется с численным расчетом, выполненным с помощью точного выражения (5.2).

5.1.2. Эффекты конечной вязкости и термодиффузии

В вязком случае полная энтропия $\bar{L}(\tau)$ есть (эквивалент «невязкого» выражения (5.2)):

$$\begin{aligned} \bar{L}(\tau) &= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{1}{2} \pi} \bar{T}_0^2 \delta \bar{\Omega}^2 \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos^3 \beta_0 \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\phi \left[(F_2 - 1)^2 \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \beta} + F_4^2 \cos^2 \phi \right] (\delta/d)^5. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Рисунок 3 иллюстрирует динамику (в линейном приближении) полной энтропии, вычисленную с помощью (5.9), для трех значений $\bar{\Omega}$ (0; 1; 20) и τ_α (∞ ; 400; 40). Случай $\tau_\alpha = \infty$ соответствует невязкому

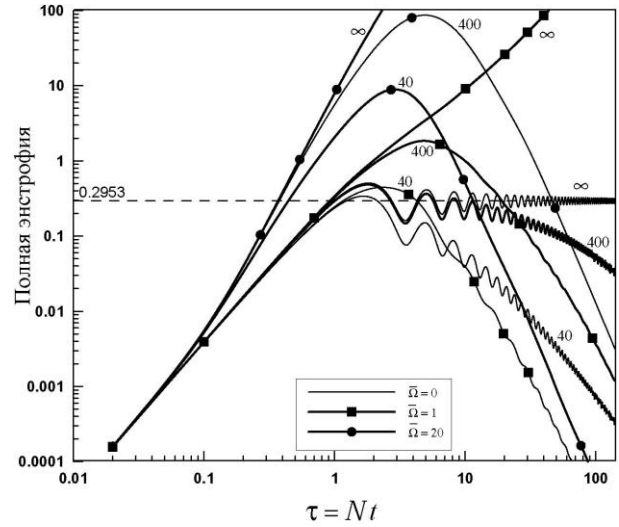


Рис. 3. «Вязкая» ($\bar{\nu} = \bar{\alpha} \neq 0$) эволюция полной безразмерной энтропии вихря $\bar{L}$ (в единицах $\bar{T}_0^2$), индуцированного начальным гауссовым возмущением температуры в стратифицированном течении с $\bar{\Omega} = 0; 1; 20$ (соответственно с числами Ричардсона $\text{Ri} = \infty; 1; 1/400$). Значения $\tau_\alpha \equiv N\Delta^2/\alpha$ указаны цифрами рядом с соответствующими кривыми. Бездиссипативный случай отмечен символом « ∞ », $\delta = \Delta/l = 0.1$

пределу. Видно, что при фиксированной стратификации N чем больше $\bar{\Omega}$ и τ_α , тем больше максимальное усиление интенсивности вихря. Тем не менее при любом конечном τ_α вихрь в конце концов затухает. Это согласуется с тем фактом, что безграничное течение Куэтта линейно устойчиво даже в нестратифицированном случае, так что возмущения могут расти только алгебраически (в невязком случае) или транзитивно (в вязком случае). В простейшем случае, когда нет шира, $\bar{\Omega} = 0$, энтропия ведет себя как

$$\begin{aligned} \bar{L}(\tau) &= 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \frac{\bar{T}_0^2 \delta}{(1 + 4\tau/\tau_\alpha)^{5/2}} \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \cos \beta_0 \sin^2(\tau \cos \beta_0) d\beta_0. \end{aligned}$$

При $\tau \gg 1$ энтропия затухает асимптотически как

$$\bar{L}(\tau) \approx \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \pi \right)^{3/2} \bar{T}_0^2 \delta (1 + 4\tau/\tau_\alpha)^{-5/2}.$$

5.2. Эволюция циркуляции

Мерой интенсивности вихря, наряду с полной энтропией, может служить его циркуляция $\bar{\Gamma}_C$. В безразмерном виде

$$\bar{\Gamma}_C = \oint_C \bar{\mathbf{u}} d\bar{\mathbf{l}}, \quad (5.10)$$

где интеграл берется по контуру C , показанному на рис. 4. Наклонная линия $\bar{x} + (\bar{\Omega}\tau)\bar{y} = 0$ — это линия, на которой в момент времени τ лежат жидкие частицы, в начальный момент находившиеся на вертикальной оси y . Вычисления компоненты завихренности ω_3 показывают (рис. 5), что эта линия является линией

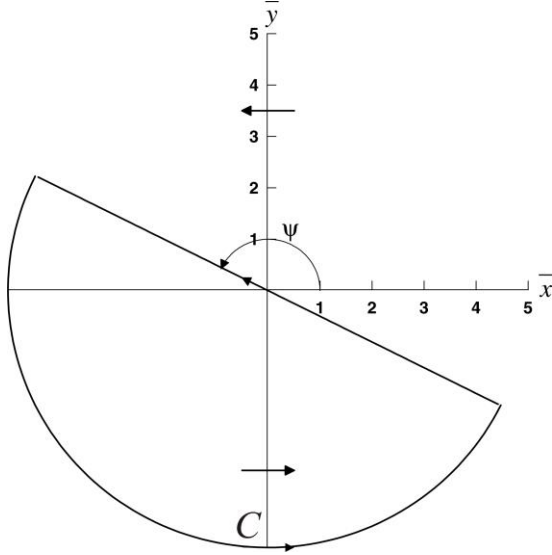


Рис. 4. Контур C . Угол ψ — угол между положительным направлением оси $\bar{x}$ и прямой линией $\bar{x} + (\bar{\Omega}\tau)\bar{y} = 0$, $\text{tg } \psi = -1/(\bar{\Omega}\tau)$

раздела в плоскости $(\bar{x}, \bar{y})$ (т. е. в плоскости $\bar{z} = 0$) между положительными и отрицательными значениями этой компоненты завихренности $\bar{\omega}_3$. Действительно, рис. 5 показывает области на плоскости $\bar{z} = 0$ для течения с $\bar{\Omega} = 1$ для трех моментов времени $\tau = 1, 6$ и 10 , где компонента $\bar{\omega}_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = 0)$ положительна (черные контуры) и отрицательна (не показана). Видно, что разделительная линия между этими областями — прямая (почти) линия $\bar{x} + (\bar{\Omega}\tau)\bar{y} = 0$. Циркуляцию можно вычислять двумя способами. Первый способ прямой — вычислять интеграл вдоль наклонной линии контура C , учитывая, что интегралы по остальным частям контура исчезающе малы. Второй способ состоит в том, чтобы предварительно преобразовать контурный интеграл к интегралу по плоскости:

$$\oint_C \bar{\omega}_3 d\bar{l} = \int_S \bar{\omega}_3(\bar{x}, \bar{y}, 0) d\bar{x} d\bar{y},$$

где область S — это полуплоскость $-\infty < \bar{x} < -(\bar{\Omega}\tau)\bar{y}$, $-\infty < \bar{y} < \infty$, т. е.

$$\bar{\Gamma}_C = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{y} \int_{-\infty}^{-(\bar{\Omega}\tau)\bar{y}} d\bar{x} \bar{\omega}_3(\mathbf{k}) e^{i(k_1 \bar{x} + k_2 \bar{y})} d^3 k.$$

Интегрируя по $\bar{x}$, найдем

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_C &= \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{y} \int \bar{\omega}_3(\mathbf{k}) e^{i(k_2 - k_1 \bar{\Omega}\tau)\bar{y}} \frac{d^3 k}{ik_1} = \\ &= -2\pi i \int \frac{d^3 q}{q_1} \zeta_3(\mathbf{q}) \delta(q_2) = \\ &= -2\pi i \int \frac{dq_1 dq_3}{q_1} \zeta_3(q_1, 0, q_3). \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.2.1. Бездиссипативный случай

Подставляя ζ_3 из (3.19) (для невязкого случая) в (5.11), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_C &= 2\pi \bar{\Omega} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\cos \phi} \int_0^{\infty} q dq [\sin^2 \phi \text{tg } \beta (F_2 - 1) - \\ &- \cos^2 \phi F_4] \frac{\bar{T}_0 \delta^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{4} q^2 \delta^2}, \end{aligned}$$

где $\text{tg } \beta = \bar{\Omega}\tau \cos \phi$ и $F_{2,4} = F_{2,4}(\beta_0 = 0, \phi; \tau)$. В результате интегрирования по q получаем

$$\bar{\Gamma}_C = \frac{\bar{T}_0 \delta \bar{\Omega}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi [\sin^2 \phi (\bar{\Omega}\tau) (F_2 - 1) - \cos^2 \phi F_4]. \quad (5.12)$$

Снова рассмотрим два предельных случая.

Случай без шира, $\bar{\Omega} \rightarrow 0$. Используя асимптотические выражения (A1) для F_2 и F_4 из приложения, получаем

$$\bar{\Gamma}_C = \sqrt{\pi} \bar{T}_0 \delta \sin \tau. \quad (5.13)$$

В размерном виде, учитывая, что $\bar{T}_0 = \delta T_0 / T_{b0}$, $\tau = Nt$, $\delta = \Delta / l$, получаем чисто синусоидальные осцилляции с частотой Бранта–Вайсяля N

$$\Gamma_C = (Nl^2) \bar{\Gamma}_C = \Gamma_{\max} \sin(Nt), \quad (5.14)$$

где $\Gamma_{\max} = \sqrt{\pi} N l \Delta (\delta T_0 / T_{b0})$. Если отсутствует не только шир, но и стратификация, получаем из (5.14)

$$\Gamma_C = \sqrt{\pi} (\Delta / \tau_B)^2 t, \quad (5.15)$$

т. е. линейный рост, как и ожидается для покоящейся жидкости [Alon et al., 2011].

Случай без стратификации, т. е. $\bar{\Omega} \rightarrow \infty$. С помощью выражений (A4) и (A5) из приложения получаем (в размерном виде)

$$\Gamma_C = (Nl^2) \bar{\Gamma}_C = \left(\frac{\Delta}{\tau_B} \right)^2 \frac{H_{\text{circ}}(\Omega t)}{\Omega}, \quad (5.16)$$

где

$$H_{\text{circ}}(\Omega t) = \frac{\Omega t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} d\phi (1 + \text{tg}^2 \phi \ln |\cos \beta|). \quad (5.17)$$

При $\Omega t \ll 1$ (или $t \ll 1/\Omega \ll 1/N$) получаем из (5.16) и (5.17)

$$\Gamma_C \approx \sqrt{\pi} (\Delta / \tau_B)^2 t [1 + \frac{1}{4} (\Omega t)^2]. \quad (5.18)$$

В частности, при $\Omega \rightarrow 0$ мы снова воспроизводим результат (5.15) для нестратифицированной покоящейся жидкости. Интересно понять асимптотическое поведение циркуляции при больших τ . Опуская детали, приведем результат. Оказывается, что в невязком случае абсолютное значение циркуляции при больших τ растет линейно с τ :

$$\bar{\Gamma}_C \approx -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \bar{T}_0 \delta \bar{\Omega}^2 \tau. \quad (5.19)$$

На рис. 6 показана эволюция циркуляции $\bar{\Gamma}_C(\tau)$ (в единицах $\bar{T}_0$) для $\bar{\Omega} = 0; 0.1; 0.5; 1$ и 5 . Видно, что в случае без шира циркуляция осциллирует, $\propto \sin \tau$. Однако при наличии шира, даже сколь угодно малого, циркуляция растет, и при относительно слабом шире этот рост сопровождается осцилляциями.

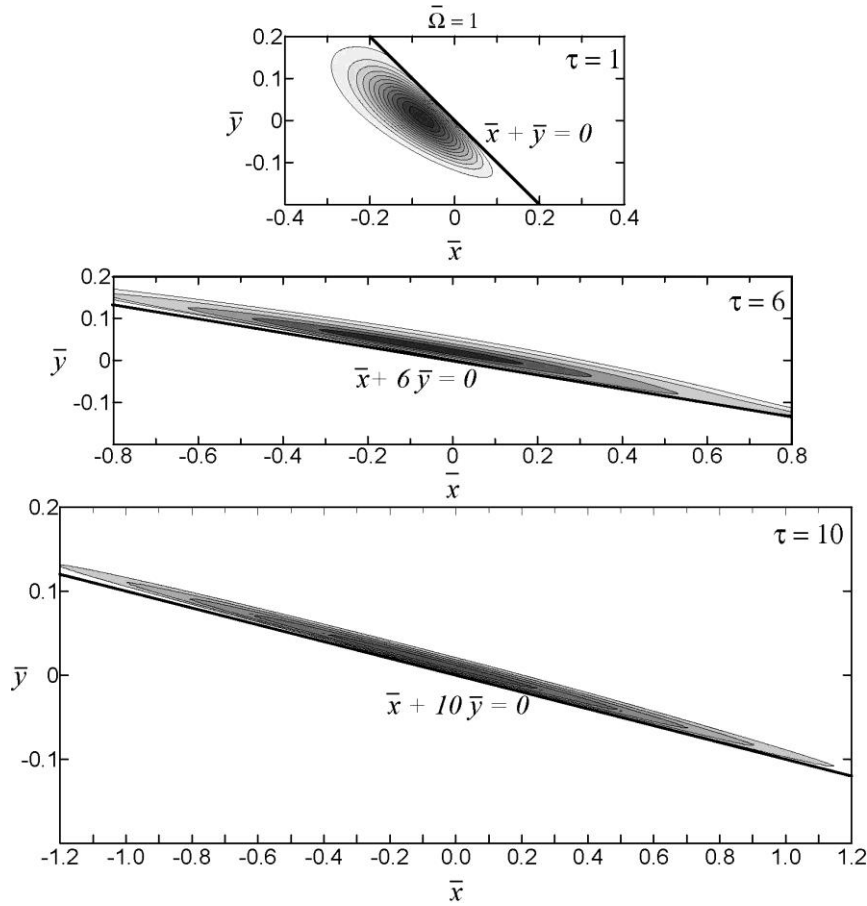


Рис. 5. Изолинии $\bar{\omega}_3$ на плоскости $\bar{z} = 0$ для течения с $\bar{\Omega} = 1$ для трех моментов времени $\tau = 1, 6$ и 10 . Область, где $\bar{\omega}_3 > 0$, показана серым, а область с $\bar{\omega}_3 < 0$, где $\bar{\omega}_3(\bar{x}, \bar{y}) = -\bar{\omega}_3(-\bar{x}, -\bar{y})$, оставлена незакрашенной. Линия раздела между областями есть прямая линия $\bar{x} + (\bar{\Omega}\tau)\bar{y} = 0$

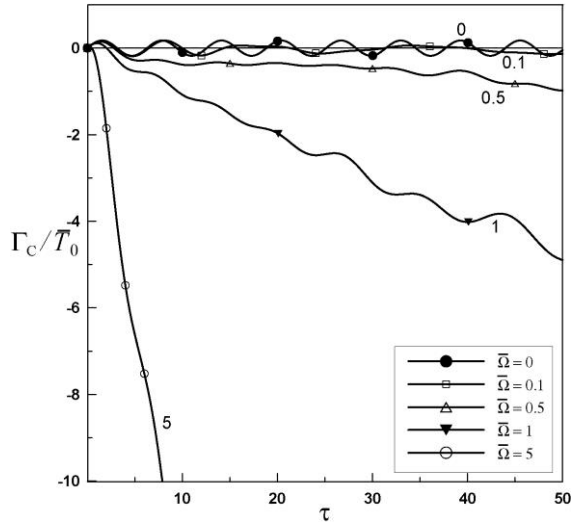


Рис. 6. Временная зависимость циркуляции $\bar{\Gamma}_C / \bar{T}_0$ для невязкого случая при $\bar{\Omega} = 0; 0.1; 0.5; 1$ и 5 (т. е. $Ri = \infty$; $100; 4; 1$ и 0.04) и $\delta = 0.1$

Видно также, что при положительном $\bar{\Omega}$ циркуляция $\bar{\Gamma}_C$ меняет знак и со временем становится отрицательной. При большем шире рост $|\bar{\Gamma}_C|$ после смены знака $\bar{\Gamma}_C$ становится монотонным и асимптотически растет линейно со временем.

5.2.2. Диссипативные эффекты

Выражение для циркуляции, обобщенное на диссипативный случай (с $\nu = \alpha$), — это то же самое выражение, что и (5.12), с той разницей, что подынтегральное выражение в диссипативном случае следует умножить на фактор $(\delta/d)^2$:

$$\bar{\Gamma}_C = \frac{\bar{T}_0 \delta \bar{\Omega}}{2\sqrt{\pi}} \times \int_0^{2\pi} d\phi [\sin^2 \phi (\bar{\Omega}\tau)(F_2 - 1) - \cos \phi F_4] (\delta/d)^2, \quad (5.20)$$

где d задается выражением (4.5), которое для $\beta_0 = 0$ имеет вид

$$d = \delta \sqrt{1 + (4\tau/\tau_\alpha) \left[1 + \frac{1}{3} (\bar{\Omega}\tau)^2 \cos^2 \phi \right]}.$$

В предельном случае без шира

$$\bar{\Omega} = 0, \quad (5.20)$$

сводится к

$$\bar{\Gamma}_C = \sqrt{\pi} \bar{T}_0 \delta \frac{\sin \tau}{1 + 4\tau/\tau_\alpha}. \quad (5.21)$$

При $\bar{\Omega} \neq 0$ и больших временах $\tau \gg \max(\bar{\Omega}^{-1}, \tau_\alpha)$ асимптотическое поведение $\bar{\Gamma}_C$ есть

$$\Gamma_C(\tau) \approx -\frac{1}{4}\sqrt{3\pi}\bar{T}_0\bar{\Omega}\delta(\tau_\alpha/\tau). \quad (5.22)$$

Таким образом, здесь, в отличие от линейного роста в невязком случае (5.19), циркуляция при больших временах затухает. Более точное выражение для $\Gamma_C(\tau)$, справедливое для $\bar{\Omega}\tau \gg 1$, но при произвольном отношении $4\tau/\tau_\alpha$, т. е. не слишком большом τ , скажем $\bar{\Omega}^{-1} \ll \tau \lesssim \frac{1}{4}\tau_\alpha$, имеет вид

$$\bar{\Gamma}_C(\tau) \approx -\frac{1}{4}\sqrt{3\pi}\bar{T}_0\bar{\Omega}\delta(\tau_\alpha/\tau)(1+\frac{1}{4}\tau_\alpha/\tau)^{-1/2}. \quad (5.23)$$

Рисунок 7 показывает временную зависимость нормированной циркуляции $\bar{\Gamma}_C(\tau)/\bar{T}_0$ для $\bar{\Omega} = 1$, $\delta = 0.1$ для вязкого течения с $\tau_\alpha = 40, 400$ и для невязкого случая. Показаны также асимптотические кривые при больших τ . Рисунок 8 иллюстрирует поведение $\bar{\Gamma}_C(\tau)/\bar{T}_0$ для другого вязкого случая с параметрами $\bar{\Omega} = 5$, $\tau_\alpha = 400$ и $\delta = 0.1$. Тонкая линия — асимптотическая кривая (5.23) $\bar{\Gamma}_C/\bar{T}_0 = -50\sqrt{3\pi}\tau^{-1}(1+100/\tau)^{-1/2}$. Из сравнения рис. 7 и 8 видно, что при одном и том же уровне диссипации чем больше шир (т. е. чем меньше Ri), тем больше абсолютное значение максимальной циркуляции. Видно также, что, в отличие от случая нестратифицированной покоящейся жидкости, циркуляция меняет знак в ходе эволюции — много раз, если шир слабый и $\bar{\Omega} \rightarrow 0$, или один раз, если $\bar{\Omega} \gtrsim 1$.

5.3. Поля завихренности и температуры в бездиссипативном случае без шира, $\bar{\Omega} = 0$

В этом разделе мы представим результаты, касающиеся случая, когда нет ни шира, ни диссипации. Оказывается, что этот случай достаточно прост с математической точки зрения, что позволяет найти полное аналитическое решение в явной форме и, в частности, исследовать асимптотическое поведение возмущений температуры и завихренности на больших расстояниях от их центров. Из (A1), (3.22) и (3.24)–(3.26) имеем

$$\bar{T}(\bar{r}, \theta, \varphi, \tau) = \frac{\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos\beta_0 \cos(\tau \cos\beta_0) \times \int_0^{2\pi} d\chi \mathcal{P}(\bar{r} \cos\Theta_0/\delta), \quad (5.24)$$

$$\bar{\omega}_1(\bar{r}, \theta, \varphi, \tau) = \frac{\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}\delta} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos\beta_0 \sin(\tau \cos\beta_0) \times \int_0^{2\pi} d\phi \sin\phi Q(\bar{r} \cos\Theta_0/\delta), \quad (5.25)$$

$$\bar{\omega}_2(\bar{r}, \theta, \varphi, \tau) = 0, \quad (5.26)$$

$$\bar{\omega}_3(\bar{r}, \theta, \varphi, \tau) = -\frac{\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}\delta} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos\beta_0 \sin(\tau \cos\beta_0) \times \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi Q(\bar{r} \cos\Theta_0/\delta), \quad (5.27)$$

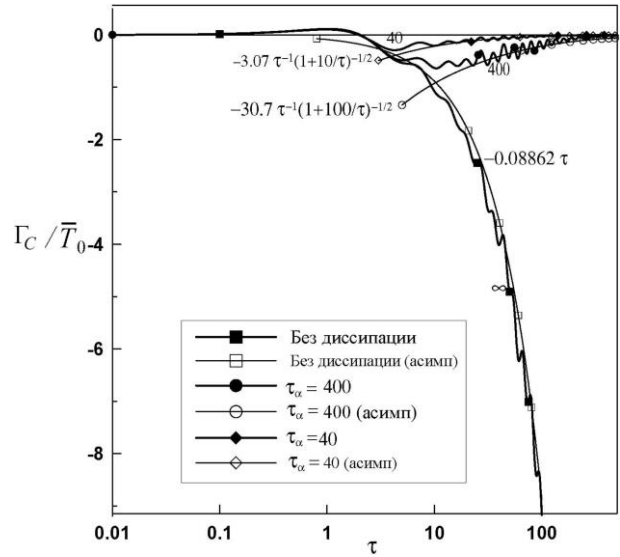


Рис. 7. Временная зависимость циркуляции $\bar{\Gamma}_C/\bar{T}_0$ для вязкого случая с $\tau_\alpha = 40, 400, \infty$ (невязкий случай) для $\bar{\Omega} = 1$ (т. е. $Ri=1$). В вязком случае циркуляция падает при больших τ как $\bar{\Gamma}_C/\bar{T}_0 \approx -0.25\sqrt{3\pi}\bar{\Omega}\delta(\tau_\alpha/\tau)\left(1+\frac{1}{4}\tau_\alpha/\tau\right)^{-1/2} = -3.07\tau^{-1}(1+10/\tau)^{-1/2}$ для $\tau_\alpha=40$ и $\bar{\Gamma}_C/\bar{T}_0 \approx 30.70\tau^{-1} \times (1+100/\tau)^{-1/2}$ для $\tau_\alpha=400$, а в невязком случае она растет почти линейно со временем $\bar{\Gamma}_C(\tau)/\bar{T}_0 \approx -0.5\sqrt{\pi}\delta\bar{\Omega}^2\tau = -0.08662\tau$. Тонкими линиями показаны асимптотические кривые для вязкого (см. (5.23)) и невязкого (см. (5.19)) случая. Значения τ_α указаны цифрами рядом с соответствующими кривыми

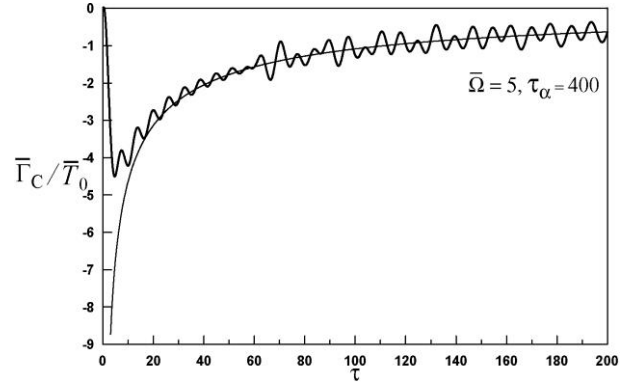


Рис. 8. Временная эволюция циркуляции $\Gamma_C/\bar{T}_0$ для вязкого случая с $\tau_\alpha=400$, $\bar{\Omega}=5$ (т. е. $Ri=1/25$) и $\delta=0.1$. Тонкая линия — асимптотическая кривая (5.23) $\bar{\Gamma}_C/\bar{T}_0 \approx -153.5\tau^{-1}(1+100/\tau)^{-1/2}$

где $\cos\Theta_0 = \cos\theta\sin\beta_0 + \sin\theta\cos\beta_0\cos\chi$, $\chi = \phi - \varphi$ и функции $\mathcal{P}(\zeta)$ и $Q(\zeta)$ определены соотношениями (3.23) и (3.27). В сферических координатах вектор $\bar{\omega}(\bar{r}, \theta, \varphi; \tau)$ имеет только азимутальную компоненту, $\bar{\omega} = \mathbf{e}_\varphi \bar{\omega}_\varphi$, которая сама азимутально-симметрична. Это легко продемонстрировать, выполняя интегрирование в (5.25) и (5.27) по χ вместо ϕ и учитывая, что Θ_0 зависит только от разности χ . Выделим азимутальную (φ) зависимость в явном виде

$$\bar{\omega}_1(\bar{r}, \theta, \varphi, \tau) = \frac{\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}\delta} \sin \varphi \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos \beta_0 \times \\ \times \sin(\tau \cos \beta_0) \int_0^{2\pi} d\chi \cos \chi Q(\bar{r} \cos \Theta_0 / \delta), \quad (5.28)$$

$$\bar{\omega}_3(\bar{r}, \theta, \varphi, \tau) = -\frac{\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}\delta} \cos \varphi \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos \beta_0 \times \\ \times \sin(\tau \cos \beta_0) \int_0^{2\pi} d\chi \cos \chi Q(\bar{r} \cos \Theta_0 / \delta). \quad (5.29)$$

Итак, в сферических координатах $\bar{\omega}_r$ и $\bar{\omega}_\theta$ компоненты отсутствуют, так как

$$\bar{\omega}_r = \sin \theta (\bar{\omega}_1 \cos \varphi + \bar{\omega}_3 \sin \varphi) = 0,$$

$$\bar{\omega}_\theta = \cos \theta (\bar{\omega}_1 \cos \varphi + \bar{\omega}_3 \sin \varphi) = 0,$$

а азимутальная компонента $\bar{\omega}_\varphi = -\bar{\omega}_1 \sin \varphi + \bar{\omega}_3 \cos \varphi$ равна

$$\bar{\omega}_\varphi(\bar{r}, \theta, \tau) = -\frac{\bar{T}_0}{4\pi^{3/2}\delta} \int_0^{\pi/2} d\beta_0 \cos \beta_0 \times \\ \times \sin(\tau \cos \beta_0) \int_0^{2\pi} d\chi \cos \chi Q(\bar{r} \cos \Theta_0 / \delta) \quad (5.30)$$

и не зависит от φ . Это выражение вместе с (5.24) дает полное решение задачи нахождения полей температуры и завихренности в линейной задаче в бездиссипативном случае без шира. Выражение (5.24) может быть представлено в виде ряда по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$. Опуская детали, запишем

$$\bar{T}(\xi, \theta; t) = \bar{T}_0 e^{-\bar{r}^2/\delta^2} \times \\ \times \left[S_0(\tau) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma(l+3/2)}{\Gamma(2l+3/2)} (-1)^l (4l+1) (\bar{r}/\delta)^{2l} \times \right. \\ \left. \times \Phi(l, 2l+3/2; \bar{r}^2/\delta^2) S_l(\tau) P_{2l}(\cos \theta) \right], \quad (5.31)$$

где $S_l(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \beta_0 \cos(\tau \cos \beta_0) P_{2l}(\sin \beta_0) d\beta_0$ и $\Phi(a, b; z)$ — функция Куммера (известная также как вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(a, b; z) = {}_1F_1(a, b; z)$ см. [Градштейн, Рыжик, 1963]):

$$\Phi(a, b; z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Интересно также рассмотреть асимптотическое поведение температуры на больших расстояниях. Используя асимптотическое выражение [Абрамовиц, Стиган, 1979]

$$\Phi(a, b; z) = [\Gamma(b)/\Gamma(a)] e^z z^{a-b} [1 + O(1/z)], \quad z \rightarrow \infty,$$

находим при $\bar{r} \gg \delta$

$$\bar{T}(\bar{r}, \theta; \tau) = \bar{T}_0 (\delta/\bar{r})^3 \sum_{l=1}^{\infty} C_l S_l(\tau) P_{2l}(\cos \theta), \quad (5.32)$$

где $C_l = (-1)^l (4l+1) \Gamma(l+3/2)/\Gamma(l)$. Видно, что на больших расстояниях несферически-симметричная часть (т. е. вклад с $l \neq 0$ в сумме (31) для температуры

$\bar{T}(\bar{r}, \theta)$) спадает довольно медленно как $1/\bar{r}^3$. С другой стороны, сферически-симметричная часть

$$\langle \bar{T} \rangle = \bar{T}_0 \exp(-\bar{r}^2/\delta^2) S_0(\tau),$$

где

$$S_0(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \beta_0 \cos(\tau \cos \beta_0) d\beta_0,$$

локализована точно так же, как и начальное возмущение, и осциллирует во времени с убывающей амплитудой (см. рис. 9, где показано поведение $S_0(\tau)$). Из (5.32) видно также, что в центре, $\bar{r} = 0$, температура ведет себя как

$$\bar{T}(0, \tau) = \bar{T}_0 S_0(\tau). \quad (5.33)$$

Интересно отметить, что при некоторых значениях момента времени ($\tau = 1.98; 5.48; 8.57; 11.76; \dots$), соответствующих узлам $S_0(\tau)$, хорошо локализованная сферически-симметричная часть $\langle T \rangle$ (ядро температурного распределения) исчезает и остается только несферически-симметричный «хвост» ($l \neq 0$).

Слабое убывание величины возмущения на больших расстояниях означает, что мы не можем корректно определить силу плавучести, которая пропорциональна $\int \bar{T} d^3\bar{x}$. Точно так же невозможно корректно определить импульс Лэмба $\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \int [\bar{\mathbf{x}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}] d^3\bar{x}$, поскольку азимутальная компонента завихренности

$$\bar{\omega}_\varphi(\bar{r}, \theta; \tau) = \\ = -\int_0^\tau \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\cos \theta}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \bar{T}(\bar{r}, \theta, \tau') d\tau' \quad (5.34)$$

на больших расстояниях убывает как $\bar{\omega}_\varphi \propto 1/\bar{r}^4$.

Следует заметить, что $S_1(0) = \delta_{1,0}$, где δ_{mn} — символ Кронекера. Это означает, что при $\tau \ll 1$ вклад слагаемых с $l=0$ в сумму (5.31) является доминирующим, т. е. на ранней стадии эволюции поле температуры остается почти сферически-симметричным, $\bar{T} \approx \bar{T}_0 e^{-\bar{r}^2/\delta^2} [1 + O(\tau^2)]$, и локализованным. Завихренность $\bar{\omega}_\varphi$ и плотность энтропии $W = \bar{\omega}_\varphi^2$ есть соответственно

$$\bar{\omega}_\varphi \approx (2\bar{r} \sin \theta / \delta^2) \bar{T}_0 e^{-\bar{r}^2/\delta^2} \tau, \\ W(r, \theta, \tau) = (4\bar{r}^2 \sin^2 \theta / \delta^4) \bar{T}_0^2 e^{-2\bar{r}^2/\delta^2} \tau^2 = \\ = 4\bar{T}_0^2 \tau^2 (\bar{x}_\perp^2 / \delta^4) e^{-2(\bar{x}_\perp^2 + \bar{y}^2)/\delta^2}, \quad (5.35)$$

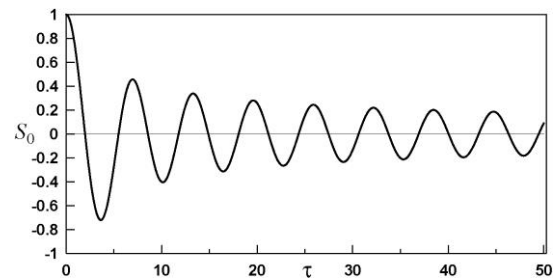


Рис. 9. Функция $S_0(\tau)$

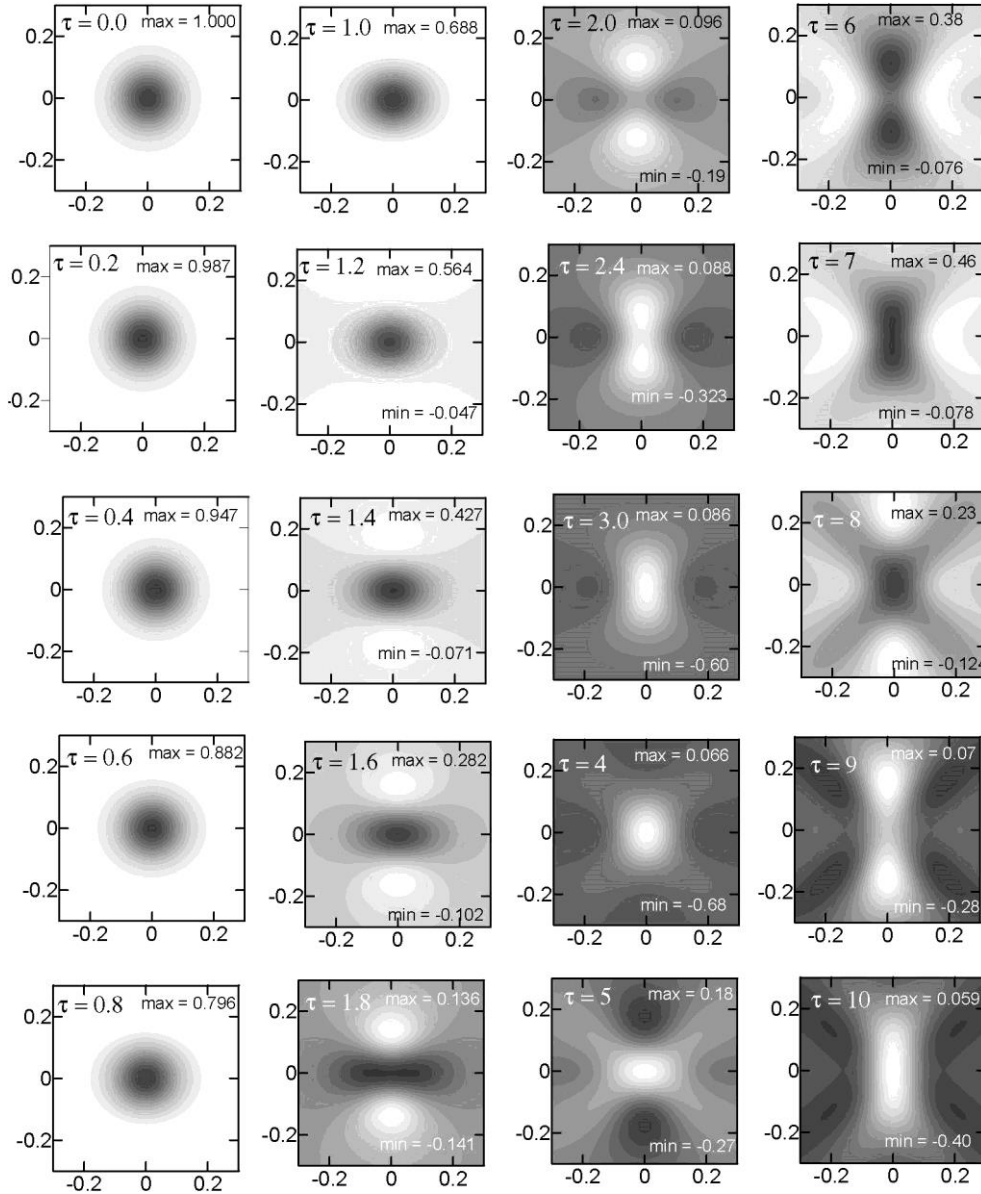


Рис. 10. Изолинии относительного возмущения температуры $\bar{T}/\bar{T}_0$ для случая без шира в любом вертикальном сечении для двадцати значений τ , помеченных на каждой субфигуре. Дополнительно указаны минимальное и максимальное значения относительного возмущения температуры. Белый цвет (для $\tau \geq 1.4$) соответствует областям, которые холоднее фоновой среды, а серым цветом представлены области более горячие, чем фон

где $\bar{x}_\perp = \bar{r} \sin \theta = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2}$. Таким образом, из (5.35) видно, что на ранней стадии эволюции (пока $\tau \lesssim 2.4$, см. рис. 11) область, где сосредоточена основная завихренность, имеет форму вихревого кольца. Рисунки 10 и 11 показывают эволюцию полей температуры и плотности энтропии соответственно. Хотя изолинии показаны только в одном произвольном вертикальном сечении, в силу азимутальной симметрии легко представить полную 3D-картину.

5.4. Поля температуры и плотности энтропии при наличии сдвига скорости в невязком случае

Здесь мы, в отличие от предыдущего раздела, представим 3D-эволюцию полей завихренности и

температуры в более общем случае, т. е. при наличии шира (однако диссипация по-прежнему отсутствует). Поле возмущения характеризуется нормализованной температурой $\bar{T}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) \equiv T(\bar{\mathbf{x}}, \tau)/T_{b0}$ и плотностью энтропии $W(\bar{\mathbf{x}}, \tau) \equiv \omega^2(\bar{\mathbf{x}}, \tau)$. Для иллюстрации выбраны $\delta=0.1$ и три значения параметра $\bar{\Omega}$: $\bar{\Omega} = \text{Ri}^{-1/2} = 0.1; 1; 5$. В силу линейности задачи начальная амплитуда возмущения температуры предполагается достаточно слабой: $\bar{T}_0 \equiv \delta T_0/T_{b0} \ll 1$. Абсолютные значения $\bar{T}$ и $\bar{\omega}_j$ пропорциональны $\bar{T}_0$, поэтому температура показана в единицах $\bar{T}_0$ (в предположении, что возмущенная область горячее фона: $\bar{T}_0 > 0$), а плотность энтропии — в единицах $\bar{T}_0^2$. На рис. 12–14 показаны 3D-поля температуры (два

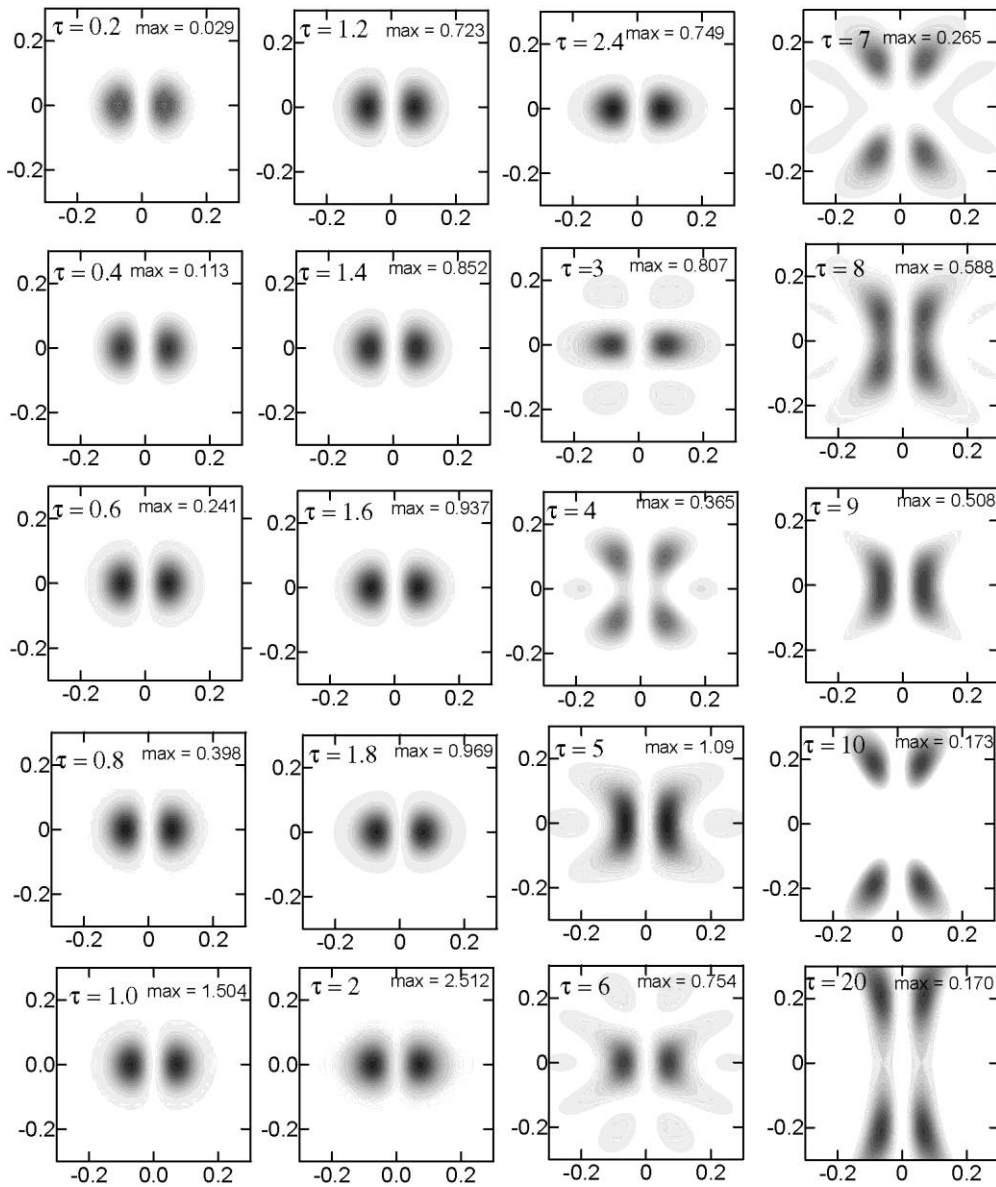


Рис. 11. Изолинии плотности энтропии W (в единицах $\bar{T}_0^2$) для случая без шира в произвольном вертикальном сечении для двадцати значений τ , отмеченных на каждой субфигуре. Дополнительно указаны максимальные значения плотности энтропии. Более темный цвет соответствует большим значениям плотности энтропии

верхних ряда) и плотности энтропии (два нижних ряда) для нескольких моментов времени τ при $\bar{\Omega} = 0.1, 1$ и 5 . Соответствующие числа Ричардсона равны $100, 1$ и 0.04 . Изоповерхности нормализованной температуры представлены уровнями 60% от их положительного максимума (красный в online-версии) и уровнем 60% от отрицательного минимума (синий в online-версии). На каждой отдельной картинке указаны максимальное и минимальное значения для каждого τ .

Изоповерхности нормализованной плотности энтропии представлены аналогичным образом. В ходе эволюции температуры возникают области, где температура более горячая, чем фон ($\bar{T} > 0$), и более холодная, чем фон ($\bar{T} < 0$). Для случаев, когда $\bar{\Omega} \leq 1$, возмущение температуры в центральной

части меняет знак со временем. В связи с этим заметим, что в невязком случае при $\bar{\Omega} = 0$ (нет шира) температура в центре меняется почти периодически (это можно показать аналитически, см. подраздел 5.3). Со временем абсолютное значение возмущения температуры падает. Во всех случаях возмущение сначала имеет сферическую форму и далее вытягивается вдоль течения. Эффект тем больше, чем больше шир $\bar{\Omega}$.

Характерной особенностью эволюции плотности энтропии является расщепление возмущения на две симметричные по высоте части. Эти две части растягиваются и увлекаются в направлении течения. Локализация вихря по $\bar{y}$ (по вертикали) и в направлении $\bar{z}$ остается примерно постоянной в течение эволюции. Так, характерные масштабы в этих направлениях $\bar{L}_y \sim \bar{L}_z \sim 4\delta$ и $\bar{L}_x \sim 4\delta\bar{\Omega}\tau$. Из сообра-

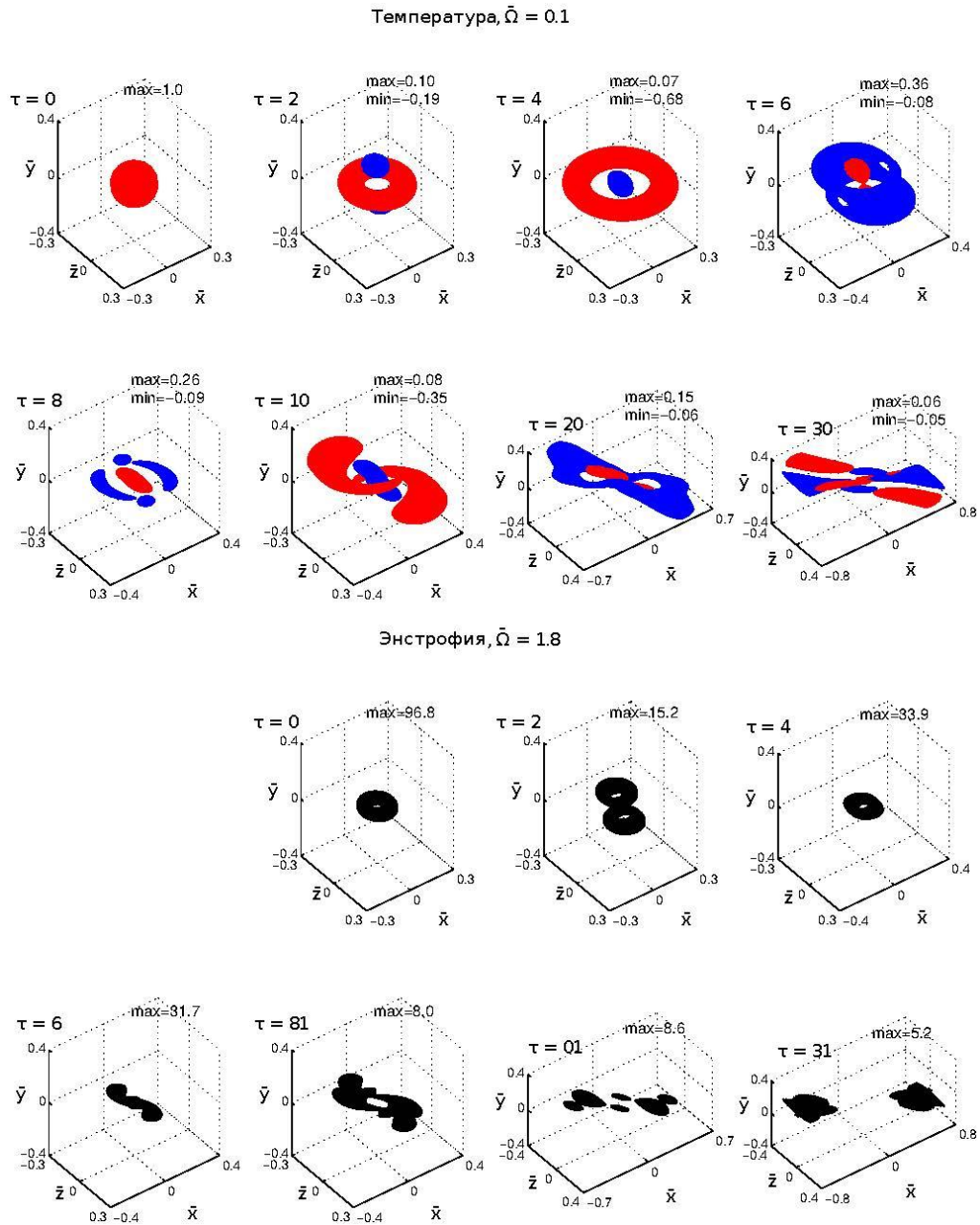


Рис. 12. Изоповерхности температуры и плотности энтропии при $\bar{\Omega} = 0.1$ для различных моментов времени. Цветной рисунок доступен в электронной версии статьи

жений симметрии очевидно, что в случае без шира поле плотности энтропии является азимутально-симметричным относительно вертикальной оси $\bar{y}$, а его размер в горизонтальном направлении не растет. Важно отметить, что во всех случаях структура возмущения центрирована вокруг начала координат (центра начального возмущения).

Максимальное значение плотности энтропии (как и полной энтропии) может расти монотонно и сопровождаться осцилляциями в зависимости от соотношения между стратификацией и широм. В случае достаточно большого шира ($\bar{\Omega} \gtrsim 1$) наблюдается монотонный рост (см. рис. 14), за исключением самой ранней стадии эволюции. Если шир довольно слабый (см. рис. 12), сперва

возникает вихревое кольцо, которое затем расщепляется на фрагменты, которые снова сливаются, и эта картина поворачивается относительно оси $\bar{z}$. Постепенно кольцо приобретает симметричную вытянутую форму ($\tau=8$) и снова расщепляется ($\tau=10$). Со временем структура поля плотности энтропии становится все более и более сложной. Процессы расщепления, растяжения, слияния и снова расщепления особенно хорошо видны в случае без шира (см. подраздел 5.3). Формирование вихря благодаря силам плавучести для случая без шира рассматривалось неоднократно (см. [Тернер, 1977; Shariff, Leonard, 1992; Alon et al., 2011]), однако влияние шира не было достаточно изучено. Если шир сильный (см. рис. 14 для $\tau=2$), основным эффектом является формирование либо

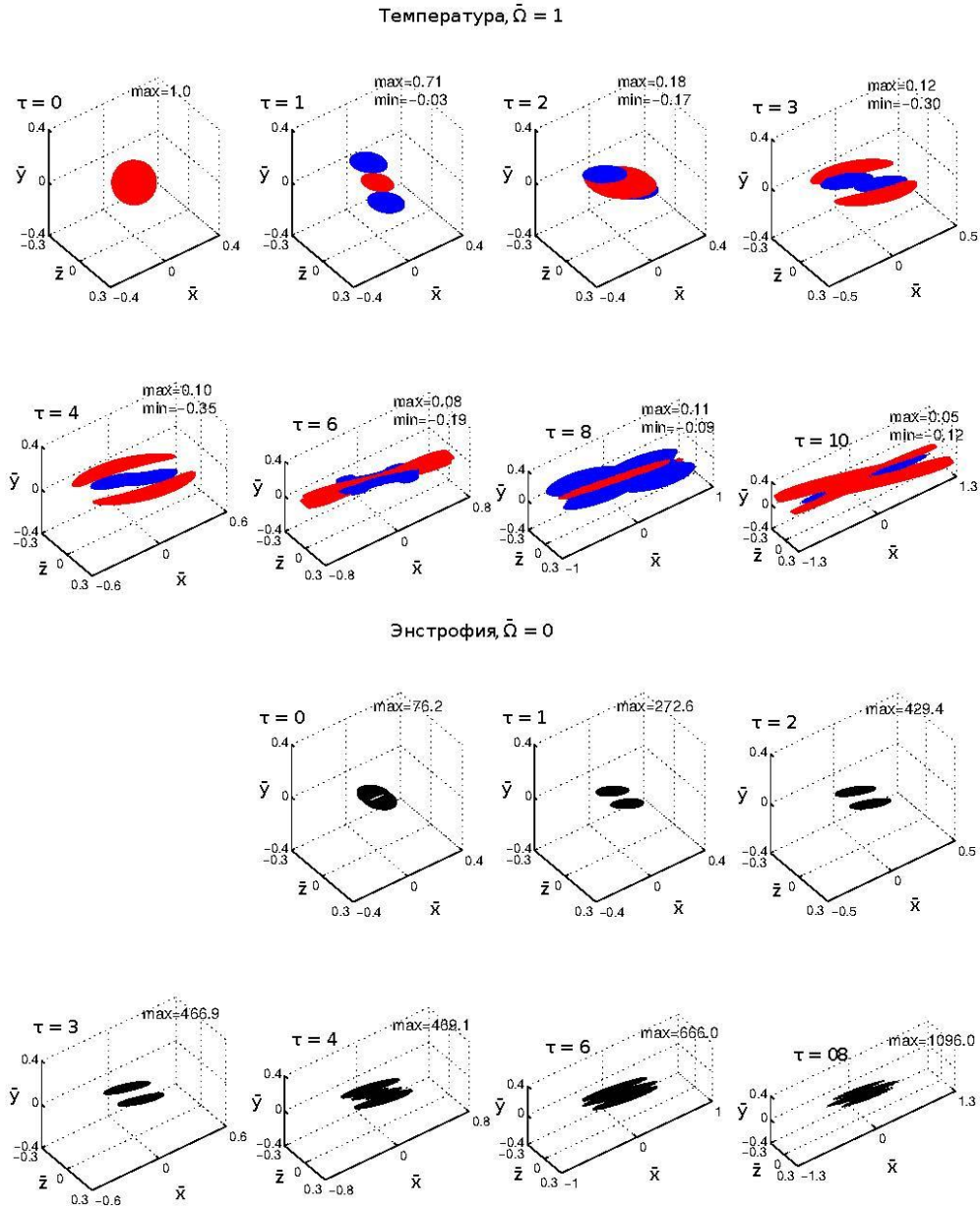


Рис. 13. Изоповерхности температуры и плотности энтропии для $\bar{\Omega} = 1$ для различных моментов времени. Цветной рисунок доступен в электронной версии статьи

двух, либо четырех «спиц», разнесенных как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении. Можно показать аналитически, что на больших расстояниях температура падает как $\bar{T} \propto 1/\bar{r}^3$, а плотность энтропии падает как $W \propto 1/\bar{r}^6$. В целом поведение возмущения температуры аналогично поведению плотности энтропии — нет подъема возмущения как целого, сохраняется симметрия относительно плоскости $\bar{z} = 0$, имеет место антисимметричное растяжение в направлении течения и расщепление на несколько фрагментов. Заметим, что наблюдаемая симметрия является следствием линейности задачи. Можно строго доказать, что свойства симметрии $\bar{T}(\bar{\mathbf{x}})$, плотности энтропии $W(\bar{\mathbf{x}})$ и компонент завихренности $\bar{\omega}_j(\bar{\mathbf{x}})$ могут быть выведены прямо из исходных уравнений (с учетом сферической

симметрии начального возмущения температуры). Однако эти свойства симметрии не имеют места, если мы учитываем внутреннюю плавучесть [Weiss Tewner, 2015], т. е. учитываем нелинейные эффекты. Нелинейность разрушает симметрию и приводит к подъему возмущения и его смещению в направлении течения (в дополнение к вытягиванию и расщеплению, наблюдаемым в линейном случае). Аналогичная картина наблюдается при эволюции начального локализованного (гауссова) вихря в нестратифицированном течении Куэтта. В линейном случае (начальное возмущение достаточно слабое) область, занятая вихрем, трансформируется в пару вытянутых областей, параллельных друг другу и центрированных вокруг начала координат [Шухман, Левинский, 2003], с противоположным вращением жидкости в них, а в случае сильного начального вихря форми-

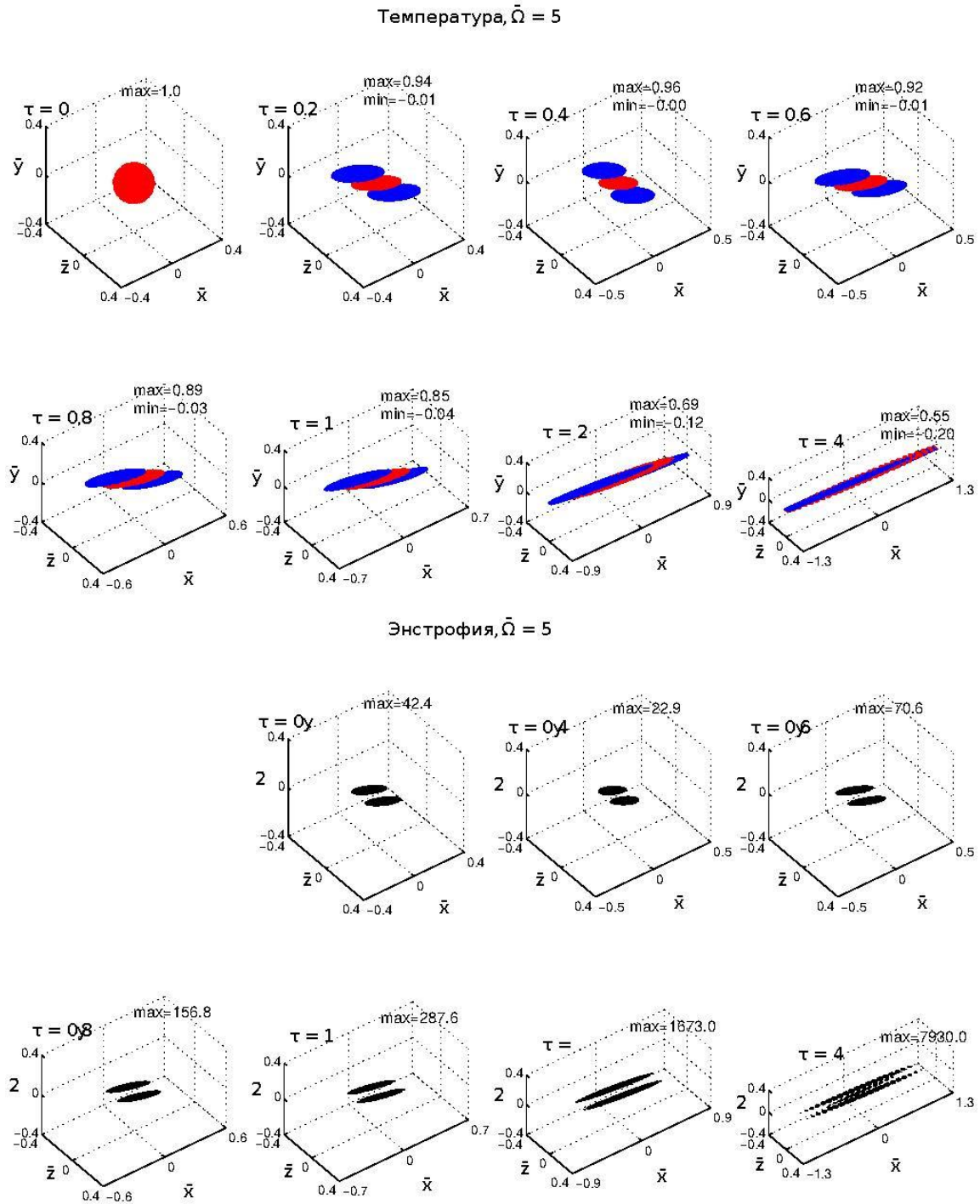


Рис. 14. Изоповерхности температуры и плотности энтропии для $\bar{\Omega} = 5$ для различных моментов времени. Цветной рисунок доступен в электронной версии статьи

руется шпилькообразный вихрь, движущийся в направлениях $\bar{x}$ и $\bar{y}$ [Suponitsky et al., 2005].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы исследовали линейную эволюцию локализованного вихревого возмущения, порожденного начальным локальным возмущением температуры, которое создает в области возмущения температуру более горячую или более холодную, чем в окружающем стратифицированном сдвиговом

течении. Начальное распределение температуры выбрано сферически-симметричным и имеет гауссову форму с характерным масштабом Δ . Предполагается, что этот масштаб много меньше характерных вертикальных масштабов изменения фоновой температуры и горизонтальной скорости. Поэтому задача может быть сформулирована как задача об эволюции локализованного возмущения, помещенного в течение с однородными вертикальным широм и стратификацией. Также предполагается, что внутренняя плавучесть (возникающая из-за разницы

температур возмущения и окружающей среды) достаточно мала и ею можно пренебречь. Поэтому основными факторами, определяющими динамику развития возмущения, являются внешняя плавучесть (стратификация невозмущенной среды) и сдвиг скорости (шир). В этом случае параметром, определяющим, какой из этих двух факторов доминирует, является число Ричардсона. В противоположность случаю, когда внутренняя плавучесть не мала и требуется строгий нелинейный подход, преобладание внешней плавучести (над внутренней) позволяет линеаризовать систему уравнений. Оба предположения (линейность и постоянство градиентов фоновых температуры и скорости) позволяют построить почти аналитическую теорию, описывающую развитие вихря.

Интенсивность вихря описывается двумя интегральными характеристиками: полной энтропией $\bar{L}(\tau)$ и циркуляцией $\bar{\Gamma}_C(\tau)$. Продemonстрировано, что как шир, так и стратификация (внешняя) способствуют росту интенсивности вихря. Если шир относительно слабый по сравнению со стратификацией, т. е. число Ричардсона достаточно велико, $Ri \gtrsim 1$, рост энтропии и циркуляции в невязком пределе сопровождается осцилляциями. При большом шире ($Ri \lesssim 1$) рост энтропии становится монотонным, хотя абсолютное значение циркуляции продолжает сопровождаться осцилляциями. В предельном случае без шира рост энтропии выходит на насыщение, а циркуляция периодически осциллирует с частотой Бранта–Вайселя. Найдено асимптотическое поведение энтропии $\bar{L}(\tau)$ и циркуляции $\bar{\Gamma}_C(\tau)$ при больших временах. Показано, что в невязком пределе рост энтропии $\bar{L}(\tau)$ продолжается неограниченно, следуя алгебраическому закону $\bar{L} \propto \tau^2$, а рост циркуляции следует закону $|\bar{\Gamma}_C| \propto \tau$ (за исключением случая, когда шир полностью отсутствует).

При учете диссипативных эффектов рост энтропии и циркуляции становится транзитным — после стадии роста происходит постепенное затухание вихря (как и температуры). Аналитически выведены асимптотические законы, описывающие затухание энтропии и циркуляции, вызванное диссипативными эффектами (в предположении, что число Прандтля равно единице, т. е. коэффициенты вязкости и термодиффузии равны друг другу).

Рассчитаны и представлены в виде изоповерхностей при различных временах и различных значениях числа Ричардсона (соответствующих слабому, умеренному и сильному шире) 3D-поля плотности энтропии и температуры. Продemonстрировано, что линейное приближение (т. е. пренебрежимая малость внутренней плавучести) ведет к определенным свойствам симметрии возмущения, а именно, возмущение как целое остается в течение всей эволюции сконцентрированным вокруг центра начального возмущения температуры, т. е. нет подъема и смещения возмущения как целого вдоль направления течения. Тем не менее некоторые

характерные элементы эволюции, такие как формирование вихревого кольца на начальной стадии развития в течении со слабым широм, воспроизводятся и в линейном приближении. Основной эффект шира — это растяжение возмущения и его дополнительное (по сравнению со случаем покоящейся среды) усиление, вызванное завихренностью невозмущенного течения. Влияние шира при наличии конечной внутренней плавучести (т. е. при учете нелинейности) рассмотрено в статье [Weiss Tewner et al., 2015].

Работа была поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 14-05-00080 (И.Г. Шухман) и Израильского научного фонда № 1247/06 (Ш. Вайс Тевнер и Я. Коэн).

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПОЛЕЗНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ F_2 И F_4

1. Большие числа Ричардсона ($\bar{\Omega} \ll 1$)

В случае, когда шир мал по сравнению со стратификацией, $\bar{\Omega} \rightarrow 0$ (а также в случае, когда значение $\bar{\Omega}$ произвольно, но $|\cos \phi| \ll 1$), полезны следующие асимптотические выражения для функций $F_{2,4}$:

$$F_2 = \cos(\tau \cos \beta_0), F_4 = -\frac{1}{\bar{\Omega}} \frac{\sin(\tau \cos \beta_0)}{\cos \beta_0 \cos \phi}. \quad (A1)$$

Заметим также, что выражение (A1) очень полезно при численном интегрировании по ϕ в окрестности $\phi = \frac{1}{2}\pi$ и $\phi = \frac{3}{2}\pi$.

2. Малые числа Ричардсона ($\bar{\Omega} \gg 1$)

В случае сильного по сравнению со стратификацией шира, когда $\lambda \equiv 1/(\bar{\Omega} |\cos \phi|) \ll 1$, получаем из (12) для $\Psi(\beta)$ и $\Phi(\beta)$ с помощью теории возмущений

$$\Psi(\beta) = 1 + \lambda^2 \Psi_1(\beta), \quad \Psi_1 = \ln |\cos \beta|, \quad (A2)$$

$$\Phi(\beta) = \beta + \lambda^2 \Phi_1(\beta), \quad \Phi_1' = -\beta \operatorname{tg} \beta - \ln |\cos \beta|. \quad (A3)$$

С помощью (A2) и (A3) получаем асимптотические выражения для F_2 и F_4 при $\lambda^2 \ll 1$

$$F_2(\beta_0, \phi; \tau) = 1 + \lambda^2 f_2(\beta_0, \phi; \tau),$$

$$F_4(\beta_0, \phi; \tau) = \lambda^2 f_4(\beta_0, \phi; \tau), \quad (A4)$$

где

$$f_2 = \ln \left| \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} \right| + (\beta - \beta_0) \operatorname{tg} \beta_0,$$

$$f_4 = \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_0 = -\bar{\Omega} \tau \cos \phi, \quad (A5)$$

и в (A5) $\beta = \arctg(\operatorname{tg} \beta_0 + \bar{\Omega} \tau \cos \phi)$. В предельном случае, когда стратификации совсем нет, $\lambda=0$, получаем $F_2=1$ и $F_4=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

Тёрнер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 432 с.

Шухман И.Г. Эволюция локализованного вихря в вязком эллиптическом течении // Исследовано в России. 2006. № 254. С. 2438–2462. Режим доступа: <http://www.sci-journal/articles/2006/254.pdf> (дата обращения 03.04.2015).

Шухман И.Г. Эволюция локализованного вихря в вязком течении с гиперболическими линиями тока // Исследовано в России. 2007. № 1. С. 1–26. Режим доступа: <http://www.sci-journal/articles/2007/001.pdf> (дата обращения 02.04.2015).

Шухман И.Г., Левинский В.Б. Эволюция трехмерно локализованных вихрей в сдвиговых течениях. Линейная стадия // Исследовано в России. 2003. № 6. С. 47–87. Режим доступа: <http://www.sci-journal/articles/2003/006.pdf> (дата обращения 01.04.2015). (На английском языке статья доступна на сайте: <http://arxiv.org/abs/physics/0212101> (дата обращения 01.04.2015)).

Шухман И.Г., Левинский В.Б. О формировании шпилькообразного вихря в вязком круговом сдвиговом течении // Исследовано в России. 2004. № 4. С. 23–50. Режим доступа: <http://www.sci-journal/articles/2004/004.pdf> (дата обращения 02.04.2015).

Alon G., Philip J., Cohen J. The development of a buoyant vortex in stationary and plane stagnation flows // *Europ. J. Mechanics B/Fluids*. 2011. V. 30. P. 288–298.

Bayly B.J. Three-dimensional instability of elliptical flow // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 57. P. 2160–2163.

Cohen J., Shukhman I.G., Karp M., Philip J. An analytical-based method for studying the nonlinear evolution of localized vortices in planar homogenous shear flows // *J. Comp. Phys.* 2010. V. 229. P. 7765–7773.

Craik A.D.D. The stability of unbounded two- and three-dimensional flows subject to body forces: Some exact solutions // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 198. P. 275–292.

Craik A.D.D., Allen H.R. The stability of three-dimensional time-periodic flows with spatially uniform strain rates // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 234. P. 613–627.

Craik A.D.D., Criminale W.O. Evolution of wavelike disturbance in shear flows: A class of exact solutions of Navier–Stokes equations // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1986. V. 406. P. 13–26.

Farrell B.F., Ioannou P.J. Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flow // *Phys. Fluids A*. 1993. V. 5, N 6. P. 1390–1400.

Lagnado R. R., Phan-Thien N., Leal L.G. The stability of two-dimensional linear flows // *Phys. Fluids*. 1984. V. 27. P. 1094–1101.

Majda A.J., Shefter M.G. Elementary stratified flows with instability at large Richardson number // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 376. P. 319–350.

Shariff K., Leonard A. Vortex rings // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1992. V. 24. P. 235–279.

Shukhman I.G. Evolution of a localized vortex in plane nonparallel viscous flows with constant velocity shear. I: Hyperbolic flow // *Phys. Fluids*. 2006. V. 18. 097101.

Shukhman I.G. Evolution of a localized vortex in plane nonparallel viscous flows with constant velocity shear. II: Elliptic flow // *Phys. Fluids*. 2007. V. 19. 017106.

Shukhman I.G., Levinski V.B. Temporal evolution of a localized weak vortex in viscous circular shear flows // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17. 017104.

Suponitsky V., Cohen J., Bar-Yoseph P.Z. The generation of streaks and hairpin vortices from a localized vortex

embedded in unbounded uniform shear flow // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 535. P. 65–100.

Thomson W. (Kelvin Lord) Stability of fluid motion: Rectilinear motion of viscous fluid between two parallel plates // *Phil. Mag.* 1887. V. 24, N 5. P. 188–196.

Weiss Tewner S., Cohen J., Shukhman I.G. Vortical disturbances in linearly stratified shear flow. II. Nonlinear evolution // *Phys. Fluids*. 2015. V. 27. 024104.

REFERENCES

Abramowitz M., Stegun I.A. (eds.) *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam s formulami, grafikami u matematicheskimi tablitsami*. [Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 832 p. (in Russian). (English edition: Abramowitz M., Stegun I.A. (eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. US National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 1964, 1046 p.)

Alon G., Philip J., Cohen J. The development of a buoyant vortex in stationary and plane stagnation flows. *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2011, vol. 30, pp. 288–298. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2011.02.001

Bayly B.J. Three-dimensional instability of elliptical flow. *Phys. Rev. Lett.* 1986, vol. 57, pp. 2160–2163. DOI: 10.1103/PhysRevLett.57.2160.

Cohen J., Shukhman I.G., Karp M., Philip J. An analytical-based method for studying the nonlinear evolution of localized vortices in planar homogenous shear flows. *J. Comp. Phys.* 2010, vol. 229, pp. 7765–7773. DOI: 10.1016/j.jcp.2010.06.035.

Craik A.D.D. The stability of unbounded two- and three-dimensional flows subject to body forces: Some exact solutions. *J. Fluid Mech.* 1989, vol. 198, pp. 275–292. DOI: 10.1017/S0022112089000133.

Craik A.D.D., Allen H.R. The stability of three-dimensional time-periodic flows with spatially uniform strain rates. *J. Fluid Mech.* 1992, vol. 234, pp. 613–627. DOI: 10.1017/S0022112092000934.

Craik A.D.D., Criminale W.O. Evolution of wavelike disturbance in shear flows: A class of exact solutions of Navier–Stokes equations. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1986, vol. 406, pp. 13–26. DOI: 10.1098/rspa.1986.0061.

Farrell B.F., Ioannou P.J. Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flow. *Phys. Fluids A*. 1993, vol. 5, no. 6, pp. 1390–1400. DOI: 10.1063/1.858574.

Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii*. [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 1100 p. (in Russian). (English edition: Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of Integrals, Sums, Series, and Products. 7 Edition, Academic Press, Elsevier Inc., 2007, 1171 p.).

Lagnado R.R., Phan-Thien N., Leal L.G. The stability of two-dimensional linear flows. *Phys. Fluids*. 1984, vol. 27, pp. 1094–1101. DOI: 10.1063/1.864755.

Majda A.J., Shefter M.G. Elementary stratified flows with instability at large Richardson number. *J. Fluid Mech.* 1998, vol. 376, pp. 319–350. DOI: 10.1017/S0022112098003085.

Shariff K., Leonard A. Vortex rings. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1992, vol. 24, pp. 235–279. DOI: 10.1146/annurev.fl.24.010192.001315.

Shukhman I.G. Evolution of a localized vortex in plane nonparallel viscous flows with constant velocity shear. I: Hyperbolic flow. *Phys. Fluids*. 2006, vol. 18, 097101. DOI: 10.1063/1.2337319.

Shukhman I.G. Evolution of localized vortex in viscous flow with elliptic streamlines, *Issledovano v Rossii* [Investigated in Russia]. 2006, no. 254, pp. 2438–2462. Available at: <http://www.sci-journal/articles/2006/254.pdf> (accessed 03.04.2015) (in Russian).

Shukhman I.G. Evolution of a localized vortex in plane nonparallel viscous flows with constant velocity shear. II: Elliptic flow. *Phys. Fluids*. 2007, vol. 19, 017106. DOI: 10.1063/1.2424678.

Shukhman I.G. Evolution of localized vortex in viscous flow with hyperbolic streamlines, *Issledovano v Rossii* [Investigated in Russia]. 2007, no. 1, pp. 1–26. Available at: <http://www.sci-journal/articles/2007/001.pdf> (accessed 02.04.2015) (in Russian).

Shukhman I.G., Levinski V.B. Evolution of three-dimensional localized vortices in shear layers. Linear stage, *Issledovano v Rossii* [Investigated in Russia]. 2003, no. 6, pp. 47–87. Available at: <http://www.sci-journal/articles/2003/006.pdf> (accessed 01.04.2015) (in Russian). (English version available at: <http://arxiv.org/abs/physics/0212101> (accessed 01.04.2015)).

Shukhman I.G., Levinski V.B. On the formation of hairpin vortex in viscous circular shear layer, *Issledovano v Rossii* [Investigated in Russia]. 2004, no. 4, pp. 23–50. Available at: <http://www.sci-journal/articles/2004/004.pdf> (accessed 02.04.2015) (in Russian).

Shukhman I.G., Levinski V.B. Temporal evolution of a localized weak vortex in viscous circular shear flows. *Phys. Fluids*. 2005, vol. 17, 017104. DOI: 10.1063/1.1828125.

Suponitsky V., Cohen J., Bar-Yoseph P.Z. The generation of streaks and hairpin vortices from a localized vortex embedded in unbounded uniform shear flow. *J. Fluid Mech.* 2005, vol. 535, pp. 65–100. DOI: 10.1017/S0022112005004453.

Thomson W. (Kelvin Lord) Stability of fluid motion: Rectilinear motion of viscous fluid between two parallel plates. *Phil. Mag.* 1887, vol. 24, no. 147, pp. 188–196. DOI:10.1080/14786448708628078.

Turner J.S. *Effekty plavuchesti v zhidkoyah*. [Buoyancy Effects in Fluids]. Moscow, Mir Publ., 1977, 432 p. (in Russian). (English edition: Turner J.S. Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge University Press, 1973, 367 p.).

Weiss Tewner S., Cohen J., Shukhman I.G. Vortical Disturbances in linearly stratified shear flow. II. Nonlinear evolution. *Phys. Fluids*. 2015, vol. 27, 024104. DOI: 10.1063/1.4907187.