

ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ПОЛОИДАЛЬНОГО АЛЬФВЕНОВСКОГО РЕЗОНАТОРА МЕТОДОМ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ ПО ДАННЫМ СПУТНИКА VAN ALLEN PROBES

STUDYING THE RADIAL STRUCTURE OF THE POLOIDAL ALFVÉN RESONATOR BY THE METHOD OF PHASE PORTRAITS FROM VAN ALLEN PROBES SATELLITE DATA

А.А. Власов

Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, a.vlasov@mail.iszf.irk.ru

A.A. Vlasov

Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, a.vlasov@mail.iszf.irk.ru

Аннотация. В работе исследована пространственная структура собственных гармоник полоидального альфвеновского резонатора, зарегистрированных спутником RBSP-B 23 октября 2012 г. в 19:12–20:24 UT. Для интерпретации данных использован метод фазовых портретов, представляющих собой совокупность графиков компонент магнитного/электрического поля колебаний и разности фаз между поперечными компонентами. На основе теоретического описания магнитосферных МГД-волн построено аналитическое решение для собственных мод полоидального альфвеновского резонатора. Показано, что разности фаз отдельных монохроматических гармоник наблюдаемых колебаний имеют квазипериодическую структуру, что позволило подтвердить их резонаторную природу, а аналитически рассчитанные компоненты магнитного поля вдоль траектории движения спутника качественно совпадают с данными спутниковых наблюдений. На основе сопоставления теоретических расчетов структуры поперечных компонент магнитного поля с данными наблюдений выдвинуто предположение, что основной вклад в наблюдаемые колебания вносят вторая и четвертая собственные гармоники полоидального резонатора.

Ключевые слова: альфвеновские волны, полоидальный резонатор, УНЧ-волны, спутниковые наблюдения.

Abstract. In the paper, we examine the spatial structure of eigenharmonics of the poloidal Alfvén resonator recorded by the RBSP-B satellite on 23 October 2012 at 19:12–20:24 UT. We employ the method of phase portraits, which is a set of plots of magnetic/electric field components of oscillations as well as the phase shift between transverse components, to interpret the data. Based on the theoretical description of magnetospheric MHD waves, an analytical solution for eigenharmonics of the poloidal Alfvén resonator is framed. The phase shift of individual harmonics of the observed oscillations is shown to have a quasi-periodic structure, which allows us to confirm that they have resonator modes, and the magnetic field components analytically calculated along the satellite trajectory qualitatively coincide with the satellite data. From comparison of theoretical calculations of the structure of transverse magnetic field components with observational data, we put forward an assumption that the second and fourth harmonics of the poloidal resonator make the main contribution to the observed oscillations.

Keywords: Alfvén waves, poloidal resonator, ULF waves, satellite observations.

ВВЕДЕНИЕ

Альфвеновские волны, одна из ветвей магнитогидродинамических колебаний плазмы, играют значительную роль в динамике магнитосферы [Keiling, 2009]. Их пространственная структура отличается разнообразием и зависит от свойств среды и источника волны. Принято выделять два типа поляризации альфвеновских волн. Волны с доминирующей радиальной (поперек магнитных оболочек) компонентой магнитного поля называют полоидальными. Такие волны являются азимутально-мелкомасштабными, т. е. значение их азимутального волнового числа $m \gg 1$ [Leonovich, Mazur, 1993]. Источниками таких волн могут быть ионосферные токи или резонансное взаимодействие с заряженными частицами плазмы

[Leonovich, Mazur, 1996; Lee, Lysak, 1990]. Волны, в которых доминирует азимутальная компонента магнитного поля, называют тороидальными и они обычно являются азимутально-крупномасштабными ($m \sim 1$). Генерацию тороидальных колебаний чаще связывают с явлением альфвеновского резонанса (Field Line Resonance, FLR) [Tamao, 1965; Chen, Hasegawa, 1974; Southwood, 1974].

Важной плазменной характеристикой при изучении альфвеновских волн является распределение альфвеновской скорости, определяемой в гауссовой системе как $v_A = B / \sqrt{4\pi\rho}$, где B — напряженность магнитного поля; ρ — массовая плотность плазмы. В переходной области между внешней и внутренней

магнитосферой, называемой плазмопаузой, из-за резкого падения концентрации плазмы в направлении поперек магнитных оболочек [Kim et al., 2018] распределение альфвеновской скорости имеет два локальных экстремума — минимум и максимум. В данных областях возможно формирование альфвеновских резонаторов — областей, ограниченных в поперечном направлении точками поворота, а в продольном (вдоль силовых линий магнитного поля) — проводящей ионосферой, в которых возможна генерация и поддержание запертых внутри стоячих волн [Leonovich, Mazur, 1995].

Стоит отметить, что запирающие волн может происходить и в других областях околоземного космического пространства [Lysak, Yoshikawa, 2006]. Хорошо известно явление шумановского резонанса в системе Земля—ионосфера, играющее важную роль в мониторинге глобальных явлений электрической природы, например грозовой активности [Schumann, 1952]. Хорошо изучен ионосферный альфвеновский резонатор (ИАР), который формируется внутри ионосферы между ее основанием и областью выше максимума F-слоя [Поляков, Рапопорт, 1981]. Наконец, в магнитосфере возможно также формирование резонаторов для ионно-циклотронной и ион-ионной гибридных мод. В продольном направлении такие волны оказываются заперты между точками отражения вблизи геомагнитного экватора [Guglielmi et al., 2001; Mikhailova et al., 2020].

Спутниковые наблюдения альфвеновских волн в магнитосфере ведутся уже несколько десятилетий. Миссии, такие как CLUSTER, Van Allen Probes, THEMIS и другие, позволяют регистрировать альфвеновские колебания внутри магнитосферы, например, в диапазоне частот от единиц до нескольких десятков миллигерц (Pc4-Pc5) в основном регистрируются фундаментальная (первая) или вторая гармоники стоячей полоидальной моды [Min et al., 2017; Takahashi et al., 2018]. Тем не менее, альфвеновские волны имеют разнообразную мелкомасштабную поперечную структуру, которая до сих пор изучена спутниками недостаточно подробно [Stasiewicz et al., 2000]. Основной проблемой в определении пространственной структуры магнитогидродинамических волн является тот факт, что измерения, проводимые космическими аппаратами, представляют собой временные ряды физических параметров, связанных с положением аппарата в пространстве. Это создает сложности при попытке однозначно разделить временные и пространственные вариации, что затрудняет определение пространственной структуры волн. Такая проблема частично решается при использовании группировок из четырех и более аппаратов [Paschmann, Daly, 2008].

Для определения мелкомасштабной радиальной (поперек магнитных оболочек) структуры монохроматических альфвеновских колебаний по данным одного аппарата в работе [Leonovich et al., 2022] был предложен метод фазовых портретов. Фазовый портрет альфвеновской волны представляет собой набор графиков компонент магнитного (или электрического) поля волны и разности фаз между поперечными компонентами магнитного (или электрического) поля

волны. Для монохроматической волны эта величина не зависит от времени, азимутальной и продольной координат, что позволяет однозначно определить поперечную структуру и тип альфвеновских колебаний по данным одного спутника. В работе [Kozlov et al., 2024] с помощью метода фазовых портретов впервые была исследована пространственная структура альфвеновской волны в процессе изменения поляризации с полоидальной на тороидальную. В данной работе рассмотрен случай наблюдения собственных гармоник альфвеновского полоидального резонатора, сформированного в окрестности локального максимума альфвеновской скорости [Mager et al., 2018].

Работа имеет следующую структуру. В первом разделе описаны результаты наблюдений спутника Van Allen Probes (RBSP-B), который 23 октября 2012 г. в 19:12–20:12 UT зафиксировал альфвеновские колебания в области, предположительно являющейся полоидальным альфвеновским резонатором. Далее с помощью метода фазовых портретов анализируется поведение разности фаз поперечных компонент магнитного поля отдельных квазимонохроматических гармоник. Во втором разделе представлены основные уравнения, описывающие пространственную структуру гармоник полоидального резонатора, и получены выражения, используемые в аналитических расчетах структуры поля. В третьем разделе проведено сопоставление спутниковых данных с результатами аналитических расчетов структуры собственных гармоник полоидального резонатора. В заключении сформулированы основные результаты исследования.

1. ДАННЫЕ СПУТНИКОВЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Согласно работе [Mager et al., 2018], 23 октября 2012 г. в 19:12–20:24 UT спутник RBSP-B зафиксировал ультранизкочастотную волну с доминирующими гармониками 13.6 и 15.3 мГц. Это первый случай наблюдения поперечного альфвеновского резонатора в магнитосфере Земли. Такой вывод был сделан авторами на основании нескольких факторов: 1) спутник во время события пересекал область максимума распределения собственных частот альфвеновских колебаний, и именно в такой области возможно формирование полоидального резонатора в плазме конечного давления; 2) по аналитическим оценкам собственная полоидальная частота оказалась выше тороидальной, что также является условием формирования полоидального резонатора в области максимума; 3) было обнаружено несколько соседних по частоте гармоник.

Источником волны является протонная bump-on-tail неустойчивость на энергии порядка 80 кэВ. Волна распространялась в западном направлении, а ее азимутальное волновое число $m = -100$.

На рис. 1 показаны графики для различных пространственных параметров спутника, взятые непосредственно из данных. Показано изменение параметра МакИлвейна вдоль траектории спутника, который двигался внутрь магнитосферы. По значению

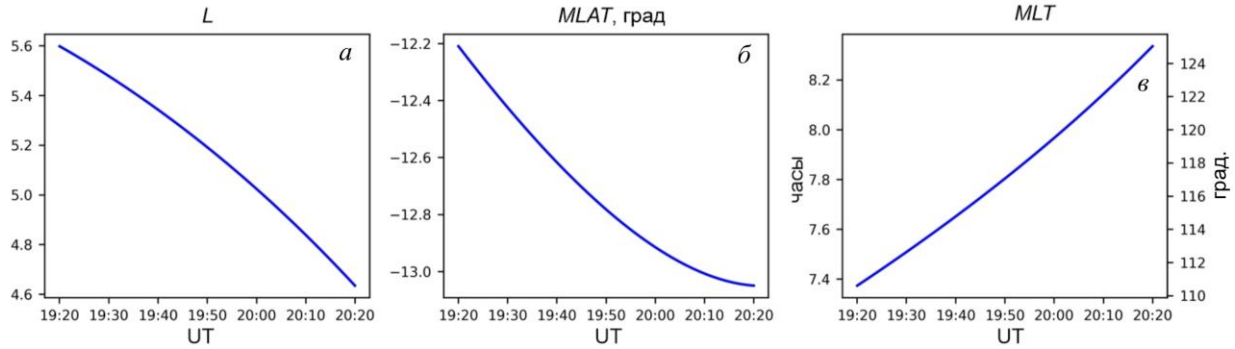


Рис. 1. Параметры, связанные с местоположением спутника RBSP-B во время события: *a* — изменение параметра МакИлвейна во время события; *b* — магнитная широта в градусах (*MLAT*); *c* — местное магнитное время *MLT*, приведенное в часах (левая ось) и градусах (правая ось)

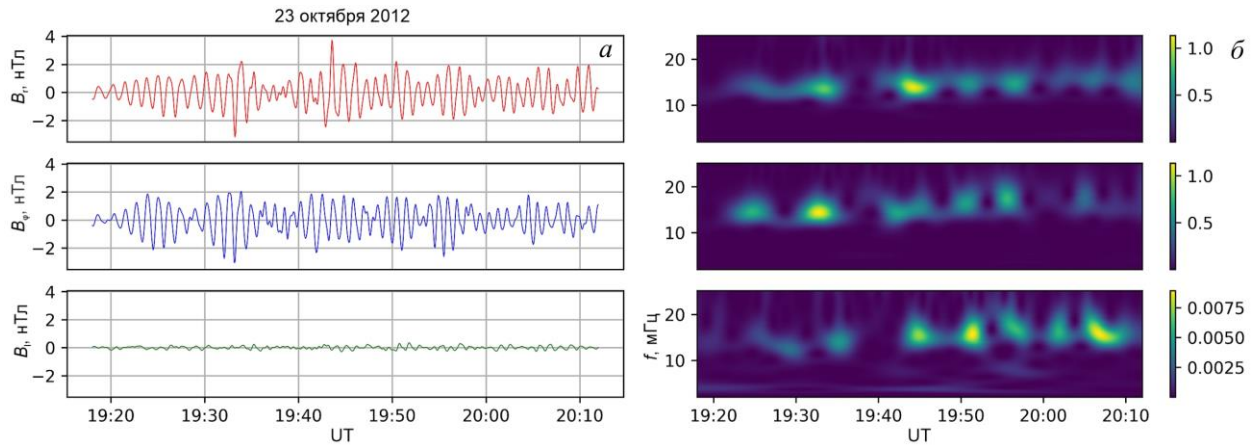


Рис. 2. Компоненты магнитного поля в системе координат, привязанной к магнитным силовым линиям (*a*): радиальная компонента поля B_r (поперек магнитных оболочек, красная кривая), азимутальная компонента B_ϕ (синяя кривая), продольная компонента B_l , направленная вдоль силовых линий магнитного поля (зеленая кривая). Вейвлет-спектр Морле, нормированный на отклик единичного сигнала (*b*). Вверху — спектр радиальной компоненты магнитного поля B_r , в центре — спектр азимутальной компоненты магнитного поля B_ϕ , внизу — спектр продольной компоненты магнитного поля B_l

MLT, приведенному в градусах и часах, видно, что спутник находился в утреннем секторе. Наконец, показано изменение магнитной широты *MLAT*, по которому можно сделать вывод, что спутник во время события практически не смещался по широте.

На рис. 2 показаны амплитуды компонент магнитного поля, а также соответствующие им вейвлет-спектры. Для анализа использовались данные магнитометра EMFISIS в системе координат GSE (Geocentric Solar Ecliptic coordinate system) с интервалом 4 с, к которым был применен полосовой фильтр с границами 3 и 40 мГц. Фоновое магнитное поле B_0 было определено с использованием метода скользящего среднего. Затем были найдены проекции возмущенного магнитного поля в системе координат, связанной с геометрией силовых линий: продольная — в направлении фонового магнитного поля $\mathbf{e}_l = \mathbf{B}_0 / |\mathbf{B}_0|$, азимутальная — в направлении $\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_l \times \mathbf{r} / r$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор местоположения спутника, и радиальная — в направлении $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_l$. В общем случае $\mathbf{e}_r \neq \mathbf{r} / r$.

Вейвлет-спектр и величина компонент магнитного поля показывают, что амплитуды азимутальной и радиальной компонент примерно равны и значительно превышают амплитуду продольной (ком-

прессионной) компоненты. Это является характерным признаком альфвеновской волны. Во время развития всего события в спектре радиальной и азимутальной компонент наблюдаются биения с периодом ~ 8 мин, что указывает на присутствие нескольких близких гармоник и является одним из признаков наличия поперечного резонатора.

Для более наглядного представления доминирующих частот в событии на рис. 3 показана спектральная плотность мощности сигнала, где хорошо наблюдаются оба пика в окрестностях 13.6 и 15.3 мГц в обеих поперечных компонентах магнитного поля. Помимо них, в каждой компоненте можно наблюдать другие пики, однако их амплитуды заметно меньше.

На рис. 4 показаны исходные колебания радиальной и азимутальной компонент возмущенного магнитного поля и сумма монохроматических составляющих, выделенных с помощью узкополосного фильтра Баттерворта с центральными частотами 13.6 и 15.3 мГц и полушириной 1 мГц.

Применяемая реализация фильтра использует двойную фильтрацию, что позволяет компенсировать возможные фазовые искажения.

Воспользуемся методом фазовых портретов, предложенным в [Leonovich et al., 2022], для проверки предположения о том, что наблюдаемые колебания

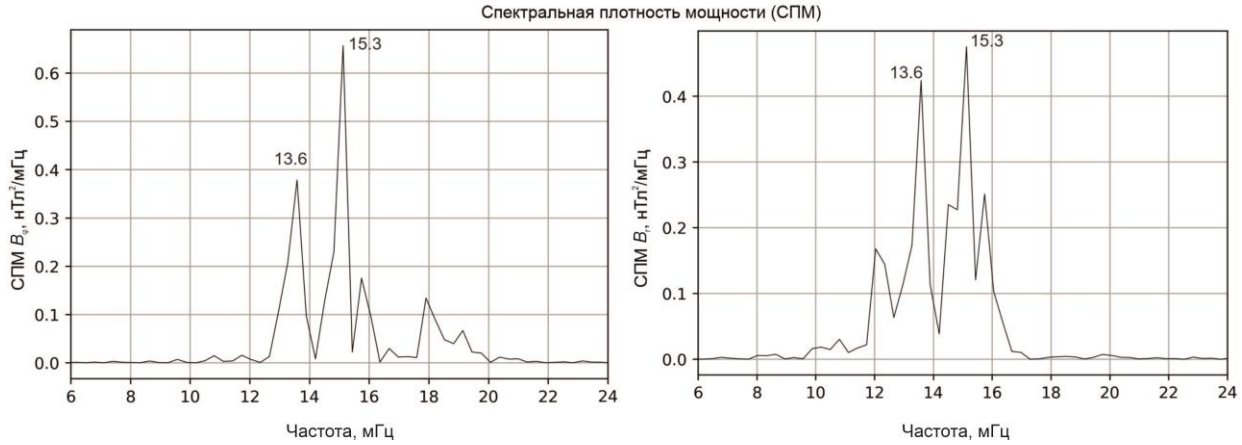


Рис. 3. Спектральная плотность мощности (СПМ) для поперечных компонент магнитного поля B_ϕ и B_r

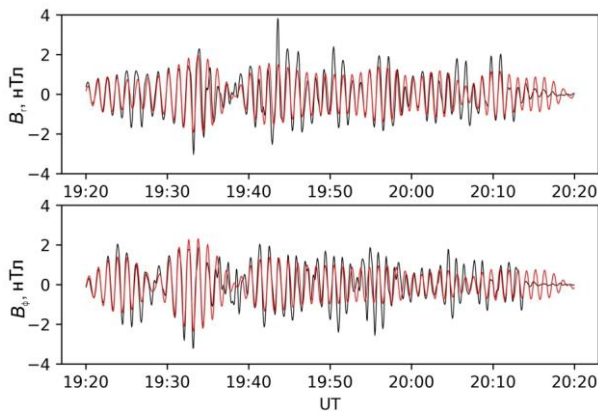


Рис. 4. Возмущенные поперечные компоненты магнитного поля B_r и B_ϕ (черные линии) и сумма выделенных монохроматических составляющих, соответствующих пикам спектральной плотности (красные линии)

являются гармониками полоидального альфвеновского резонатора. В системе координат, связанной с магнитным полем, выражение для разности фаз поперечных компонент имеет вид

$$\Delta_\phi = \arctg \frac{\text{Im}(B_\phi / B_r)}{\text{Re}(B_\phi / B_r)} \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (1)$$

Похожее выражение получается и для компонент электрического поля. Добавка $\pm \pi n$ возникает естественным образом из-за свойств функции $\arctg$ и необходима для построения гладкого графика без разрывов. Аналитическое выражение (1) получено для комплексно-значного аналитического решения. Фазу наблюдаемого квазимонохроматического сигнала также можно определить, используя различные алгоритмы, среди которых стоит выделить построение аналитического сигнала с помощью преобразования Гильберта. Этот метод по выделению амплитуды и фазы сигнала отлично показал себя в исследованиях геомагнитных пульсаций [Glassmeier, 1980; Cramm et al., 2000; Eriksson et al., 2006].

Для построения аналитического сигнала $w(t)$ произвольного временного ряда $u(t)$ воспользуемся преобразованием Гильберта [Вакман, Вайнштейн, 1977]

$$w(t) = u(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s) ds}{t-s} = A(t) e^{i\Phi(t)}, \quad (2)$$

где $u(t)$ — исходный временной ряд; $A(t)$ — амплитуда сигнала; $\Phi(t)$ — фаза сигнала, которую можно использовать для построения фазового портрета.

На рис. 5 показана разность фаз для выделенных квазимонохроматических гармоник, выделенных из спутниковых данных. Легко заметить, что разность фаз для обеих гармоник является знакопеременной функцией, что, в общем, соответствует поведению разности фаз для мод резонатора. В работе [Leonovich et al., 2022] было показано, что величина разности фаз между поперечными компонентами электрического/магнитного поля гармоники полоидального альфвеновского резонатора колеблется в диапазоне от $-\pi/2$ до $\pi/2$. При этом число переходов через нуль составляет $2n+1$, где n — номер гармоники резонатора.

Отметим, что максимальные амплитуды разности фазы на рис. 4 оказываются меньше $\pi/2$, однако колебательная структура вполне заметна. Что касается числа переходов через нуль (смен знака), то для гармоники 15.3 мГц их количество равно 3, что соответствует гармонике $n=1$, а для 13.6 мГц количество переходов составляет 7 ($n=3$). Места смены знака обозначены красными точками. Переходы, расположенные в конце интервала, не берутся в расчет, поскольку они связаны с краевыми эффектами преобразования Гильберта. Однако на графиках имеются колебания фазы (обозначены знаком вопроса), которые не пересекают нуль. Трудно сказать, нужно ли брать их в расчет числа пересечений. Если предположить, что такие пересечения произошли бы, колебания с частотой 15.3 мГц соответствовали бы $n=2$ (5 пересечений), а для 13.6 мГц количество переходов составило бы 9 ($n=4$).

Такие расхождения в поведении наблюдаемой разности фаз с модельной разностью, построенной в рамках теоретической модели резонатора, могут быть связаны с различными причинами. В первую очередь, на разность фаз может влиять присутствие в отфильтрованных гармониках малых колебаний с частотами, близкими к центральным, которые не образуют стоячие волны. Заметим, что разность фаз

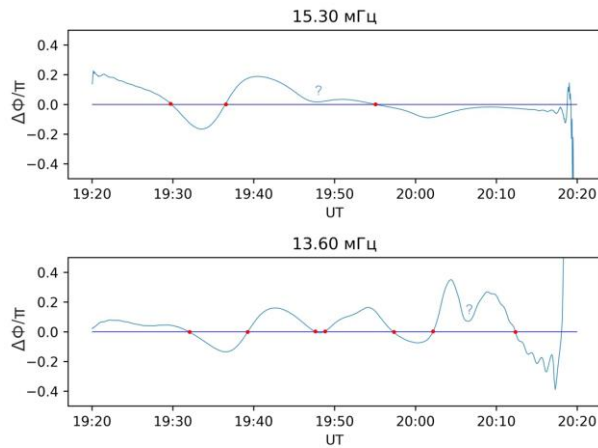


Рис. 5. Разность фаз, построенная для гармоник 15.3 и 13.6 МГц на основе спутниковых данных. Гармоники были выделены с помощью узкополосного фильтра. Красными точками обозначены учитываемые при подсчете переходы через нуль разности фаз. Знаком вопроса обозначены области, где имеются колебания разности фаз, не пересекающие нуль

для альфвеновских волн, бегущих поперек магнитных оболочек, равна нулю или имеет величину, кратную π . К сожалению, ни в фазах компонент магнитного поля, ни в их разности невозможно выделить вклад отдельных составляющих квазимонохроматического сигнала. Стоит также отметить, что модельная разность фаз построена для собственных гармоник резонатора. Однако в реальной магнитосфере собственные колебания поперечного резонатора после возбуждения должны установиться, т. е. образовать стоячие гармоники. Кроме того, альфвеновские волны в магнитосфере могут терять свою энергию, например из-за омического нагрева ионосферы [Southwood, Kivelson, 2001]. Если затухание достаточно велико, это также может мешать образованию стоячих гармоник резонатора и изменить поведение разности фаз компонент магнитного поля.

Тем не менее, разности фаз гармоник демонстрируют колебательную структуру, что принципиально отличается от случая, описанного в работе [Kozlov et al., 2024]. В ней рассматривалась генерация полоидальных альфвеновских волн на соседних оболочках в окрестности локального максимума распределения собственных частот, при этом разность фаз поперечных компонент менялась монотонно от $-\pi/2$ до $3\pi/2$ на всем интервале измерений. Таким образом, анализ разности фаз в данном случае позволяет подтвердить резонаторную природу наблюдаемых колебаний, однако вряд ли может служить строгим индикатором определения порядкового номера мод полоидального резонатора.

Далее мы построим аналитическое описание пространственной структуры собственных гармоник полоидального резонатора, которое сможем сопоставить со структурой наблюдаемых колебаний.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛОИДАЛЬНОГО АЛЬФВЕНОВСКОГО РЕЗОНАТОРА

В магнитосфере Земли каждой магнитной оболочке соответствует свое значение собственной ча-

стоты альфвеновских колебаний, зависящее от параметров плазмы. При этом в окрестностях плазмплаузы существует область, в которой альфвеновская скорость и собственные частоты имеют два экстремума — минимум и максимум. Именно в таких областях теоретически возможно существование поперечного резонатора [Leonovich, Mazur, 1990]. Однако для этого необходимо, чтобы полоидальная Ω_{PN} и тороидальная Ω_{TN} собственные частоты значительно отличались друг от друга. Было установлено, что величина поляризационного расщепления спектра (разница между полоидальной Ω_{PN} и тороидальной Ω_{TN} собственными частотами) в дипольном магнитном поле достаточно велика только для фундаментальной гармоники.

В приближении холодной плазмы ($\beta \ll 1$) $\Omega_{TN} > \Omega_{PN}$. Тогда формирование поперечного резонатора для азимутально-мелкомасштабных волн ($m \gg 1$) возможно только в минимуме распределения полоидальных собственных частот, расположенном внутри плазмплаузы, когда область прозрачности находится между двумя полоидальными резонансными поверхностями (рис. 6, а). В работе [Klimushkin et al., 2004] было показано, что величина поляризационного расщепления спектра напрямую зависит от распределения плазменного давления поперек магнитных оболочек. В плазме конечного давления более вероятен случай $\Omega_{PN} > \Omega_{TN}$ [Mager, Klimushkin, 2013]. Тогда возникновение резонатора возможно в области максимума распределений собственных частот, расположенного вблизи внешней стороны плазмплаузы (см. рис. 6, б).

Для описания пространственной структуры МГД-колебаний удобно использовать ортогональную криволинейную систему координат (x^1, x^2, x^3) , где x^1 — радиальная компонента, направленная поперек магнитных оболочек; x^2 — азимутальная координата; x^3 — координата вдоль магнитной силовой линии.

Монохроматические МГД-колебания, зависящие от координаты x^2 , можно представить в виде разложения по гармоникам вида $\sim e^{-i\omega t + ik_2 x^2}$, где $k_2 = m$ — азимутальный волновой вектор, когда $x^2 = \phi$. Однородное уравнение, описывающее структуру альфвеновских волн с $m \gg 1$, имеет вид [Leonovich, Mazur, 1993]

$$\left[\nabla_1 \hat{L}_T(\omega) \nabla_1 - k_2^2 \hat{L}_P(\omega) \right] \phi = 0, \quad (3)$$

где $\nabla_1 \equiv \partial / \partial x^1$, ϕ — скалярный потенциал, описывающий поле альфвеновской волны. Выражения для тороидального и полоидального оператора $L_T(\omega)$ и $L_P(\omega)$ определяются как

$$\hat{L}_T = \frac{\partial}{\partial l} p \frac{\partial}{\partial l} + p \frac{\omega^2}{v_A^2}, \quad \hat{L}_P = \frac{\partial}{\partial l} p^{-1} \frac{\partial}{\partial l} + p^{-1} \frac{\omega^2}{v_A^2}, \quad (4)$$

где $p = \sqrt{g_2 / g_1}$; v_A — альфвеновская скорость; g_1, g_2, g_3 — компоненты метрического тензора. Производные берутся по физической длине магнитных силовых линий l ($dl = \sqrt{g_3} dx^3$). Поперечные компоненты магнитного поля в такой системе координат

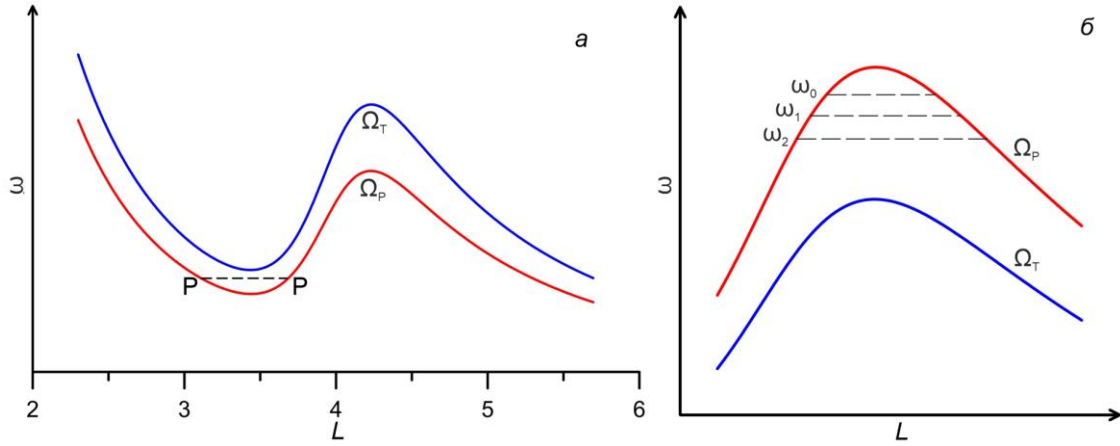


Рис. 6. Типичное распределение тороидальных и полоидальных собственных частот в направлении поперек магнитных оболочек в приближении холодной плазмы (а). Синяя и красная кривые — тороидальная и полоидальная собственные частоты. Черная штриховая линия между двумя точками Р — возможная область формирования резонатора между полоидальными поверхностями. Схематичное распределение тороидальных и полоидальных собственных частот в окрестности максимума в приближении плазмы конечного давления (б). Черные штриховые линии — примеры гармоник полоидального резонатора с частотами $\omega_0, \omega_1, \omega_2$

выражаются через потенциал φ :

$$B_1 = \frac{c}{\omega} \frac{g_1}{\sqrt{g}} k_2 \nabla_3 \varphi, \quad B_2 = i \frac{c}{\omega} \frac{g_2}{\sqrt{g}} \nabla_1 \nabla_3 \varphi, \quad (5)$$

где c — скорость света; $g = g_1 g_2 g_3$.

Если продольная длина волны много больше поперечной, для решения задачи (3) можно использовать метод разных масштабов. Это позволяет свести двумерную задачу к последовательному решению продольной и поперечной задач. Тогда мы ищем решение в виде произведения двух функций, при этом U зависит только от поперечной координаты x^1 и описывает мелкомасштабную структуру волны поперек магнитных оболочек, а P описывает крупномасштабную продольную структуру альфвеновской волны в направлении x^3 :

$$\varphi = U(x^1) P(x^1, x^3). \quad (6)$$

Вблизи полоидальной поверхности по определению имеет место соотношение

$$\left| \frac{\nabla_1}{\sqrt{g_1}} \right| \ll \frac{k_2}{\sqrt{g_2}} \quad (7)$$

и первое слагаемое в уравнении (3) оказывается много меньше второго, поэтому в главном порядке теории возмущения его можно отбросить. В результате продольная задача имеет вид

$$\hat{L}_P(\omega) \varphi = 0, \quad \varphi|_{l_{\pm}} = 0, \quad (8)$$

где граничное условие записано для идеально проводящей ионосферы.

Решение задачи (8) представляет собой набор собственных частот Ω_{PN} и собственных гармоник P_N . В ВКБ-приближении решение продольной задачи в виде $\hat{L}_P P_N = 0$ имеет вид

$$P_N = \left(\frac{p v_A}{t_A} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{\pi N}{t_A} \int_{l_-}^l \frac{dl'}{v_A} \right), \quad (9)$$

где t_A — время пробега альфвеновской волны между магнитосопреженными ионосферами; N — номер продольной гармоники.

Уравнение на функцию U_N , описывающее поперечную структуру волны с $m \gg 1$, было получено в [Leonovich, Mazur, 1993]:

$$w_N^p \nabla_1^2 U_N + k_2^2 \left[(\omega^2 + i\gamma_N)^2 - \Omega_{PN}^2 \right] U_N = k_2^2 I_N, \quad (10)$$

где I_N — множитель, отвечающий за внешний источник, например, ионосферные токи; γ_N — декремент затухания, а w_N^p определяется как

$$w_N^p = \frac{1}{t_A} \int_{l_-}^{l_+} v_A p p^* dl. \quad (11)$$

Введем безразмерную переменную $\zeta = (a - a_{PN}) / \lambda_{PN}$, где a_{PN} — положение максимума в распределении полоидальных собственных частот; λ_{PN} — характерный радиальный масштаб решения. Тогда уравнение (10) в безразмерной форме примет вид

$$\frac{d^2 U_N}{d\zeta^2} + (\sigma - \zeta^2) U_N = \frac{a_{PN}^2 I_{||}}{\lambda_{PN}^2 \omega}, \quad (12)$$

где

$$\sigma = \frac{a_{PN}^2}{\lambda_{PN}^2} \frac{(\omega + i\gamma_N)^2 - \Omega_{PN}^2}{\omega^2}. \quad (13)$$

Если сторонние токи в ионосфере отсутствуют (мы предполагаем это, так как в полоидальном резонаторе возможно формирование собственных колебаний без внешнего источника), правая часть уравнения (12) обращается в нуль. В таком случае получается хорошо известная задача для квантового осциллятора. Ее решение [Leonovich, Mazur, 1995]:

$$U_N = C_N y_n(\zeta), \quad \sigma = \sigma_n = 2n + 1, \quad (14)$$

где

$$y_n(\zeta) = \frac{1}{\pi^{1/4} 2^{n/2}} \frac{1}{n!^{1/2}} e^{-\zeta^2/2} H_n(\zeta), \quad (15)$$

$H_n(\zeta)$ — полиномы Эрмита.

В итоге скалярный потенциал ϕ , описывающий структуру альфвеновской волны с частотой ω и азимутальным волновым числом m , определяется как

$$\phi(x^1, \phi, x^3, t) = A_n P_N(x^1, x^3) y_n e^{-i\omega t + im\phi}, \quad (16)$$

где A_n — обобщенный нормировочный коэффициент.

Прежде, чем мы перейдем к сравнению аналитических результатов с данными наблюдений, скажем об ограничениях такого сравнения. Решение (16) построено в предположении, что структура гармоник резонатора вдоль силовых линий является общей для всего резонатора и имеет форму стоячих продольных гармоник P_N . Такое предположение допустимо при рассмотрении колебаний, которые достаточно узко локализованы поперек силовых линий. То же самое касается использования параболического профиля для квадрата собственной частоты — для произвольной функции такое разложение применимо лишь в ближайшей окрестности экстремума. Как показано на рис. 1, в рассматриваемом интервале наблюдений спутник регистрировал альфвеновские колебания на оболочках $L=4.6 \div 5.6$, что соответствует ширине области резонатора в экваториальной области $\sim R_E$, при этом длины силовых линий дипольного магнитного поля в начале и в конце интервала отличаются в 1.2 раза. Поэтому мы можем ожидать лишь качественного соответствия структуры аналитических решений структуре наблюдаемых гармоник поперечного резонатора.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Для теоретического расчета структуры поля в данном событии были использованы выражения, получаемые из формулы (5). Компоненты магнитного поля выражаются через функции P_N и y_n :

$$B_r = \sum_n A_n y_n \frac{im}{a} \frac{\partial P_N}{\partial l} e^{-i\omega_n t + im\phi}, \quad (17)$$

$$B_\phi = \sum_n A_n \frac{\partial y_n}{\partial a} \frac{\partial P_N}{\partial l} e^{-i\omega_n t + im\phi}. \quad (18)$$

Графики собственных функций полоидального оператора P_N , а также собственных гармоник резонатора y_n показаны на рис. 7.

Как видно на рис. 3, гармоники с частотами 13.6 и 15.3 мГц имеют сопоставимые амплитуды. Далее в численных расчетах мы будем считать амплитуды обеих ведущих частот в спектре равными $A_{15.3} = A_{13.6}$. Для азимутального числа используем оценку $m = -100$, полученную в [Mager et al., 2018].

Функция $y_n(\zeta)$ зависит от безразмерного параметра ζ . Его значение зависит от координаты a положения спутника и от характерного масштаба решения λ_{PN} . Как следует из (17)–(18), отношение амплитуд $|B_r|/|B_\phi| \approx (m/a)l$, где l — характерный масштаб изменения функции y_n . Из рис. 3 видно, что амплитуды радиальной и азимутальной компонент примерно равны, поэтому можно ожидать, что $\lambda_{PN} \sim l \sim L_0/m$, где L_0 — положение центра резона-

тора. В дальнейших расчетах мы будем использовать следующие значения параметров: $L_0 \approx 5.2 R_E$, $\lambda_{PN} \approx L_0/45 \approx 730$ км. В результате параметр λ_{PN} оказывается подобран таким образом, что соотношения амплитуд радиальной и азимутальной компонент магнитного поля примерно соответствуют наблюдаемому, а радиальный масштаб решения — масштабу наблюдаемых колебаний.

Определим физическую величину компонент магнитного поля, взяв реальную часть выражений (17)–(18). Для магнитного поля гармоник n поперечного резонатора имеем

$$B_{rn} = \frac{m}{a} y_n \frac{\partial P_N}{\partial l} \left[A_n \cos\left(m\phi - \omega_n t + \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (19)$$

$$B_{\phi n} = \frac{\partial y_n}{\partial a} \frac{\partial P_N}{\partial l} \left[A_n \cos(m\phi - \omega_n t) \right]. \quad (20)$$

Теперь сопоставим пространственную структуру наблюдаемых монохроматических гармоник полоидального резонатора с аналитическими решениями, вычисленными вдоль траектории спутника. На рис. 8 показаны азимутальные компоненты отдельных гармоник магнитного поля B_ϕ . В работе [Mager et al., 2018] было высказано предположение, что гармоника 15.3 мГц соответствует моде резонатора $n=0$, а 13.6 мГц — $n=2$. Анализ разности фаз монохроматических гармоник позволил предположить, что это более высокие моды резонатора. Красные кривые, огибающие гармоники $n=2$ для частоты 15.3 мГц и $n=4$ для частоты 13.6 мГц показали наилучшее соответствие с данными наблюдений. В ходе исследования были построены аналитические решения и для других собственных гармоник n , однако поведение их огибающих показывало худшее соответствие данным наблюдений. Например, можно сравнить аналитическое решение для гармоники $n=2$ (красная кривая на верхней панели) с огибающей гармоники с частотой 13.6 мГц (синяя кривая внизу), чтобы убедиться, что оно гораздо хуже соответствует наблюдению, чем приведенное на нижней панели решение для $n=4$.

Поведение огибающих (жирные кривые) гармоник 15.3 мГц, т. е. расположение пиков распределения амплитуды и радиальный масштаб, оказывается достаточно схожим для наблюдений и аналитического решения. Для более высокой гармоники, соответствующей частоте 13.6 мГц, можно также заметить схожесть расположения максимумов амплитуды огибающих, однако амплитуда наблюдаемой компоненты плавно затухает к концу интервала.

Нужно сказать, что предположение, высказанное в [Mager et al., 2018], о том, что наблюдались гармоники $n=0$ и $n=2$, в том числе основывалось на оценке собственных резонансных частот альфвеновских колебаний. Для этого использовалась упрощенная версия формулы для частот резонатора из [Mager, Klimushkin, 2013]. В полном виде формула имеет вид

$$\omega_n^2 = \Omega_{PN}^2 + \frac{1}{2} (a\Omega_{PN})^2 (2n+1)^2 - \frac{1}{2} (a\Omega_{PN})^2 (2n+1)^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\Omega_{PN}^2 - \Omega_{TN}^2}{(a\Omega_{PN})^2 (2n+1)^2}}, \quad (21)$$

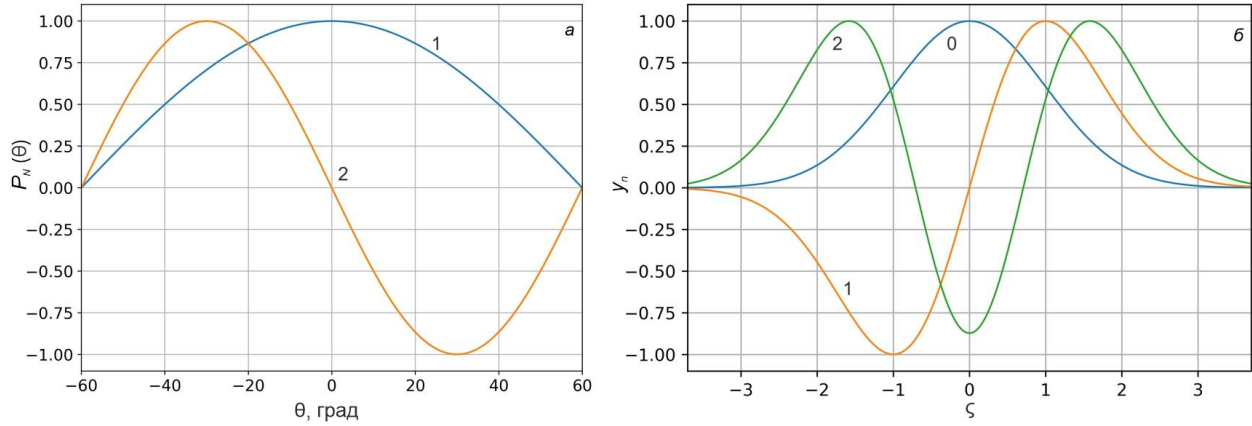


Рис. 7. Полоидальные собственные функции P_N для первых двух гармоник $N=1, 2$ (а); собственные гармоники резонатора y_n для первых трех гармоник $n = 0, 1, 2$ (б)

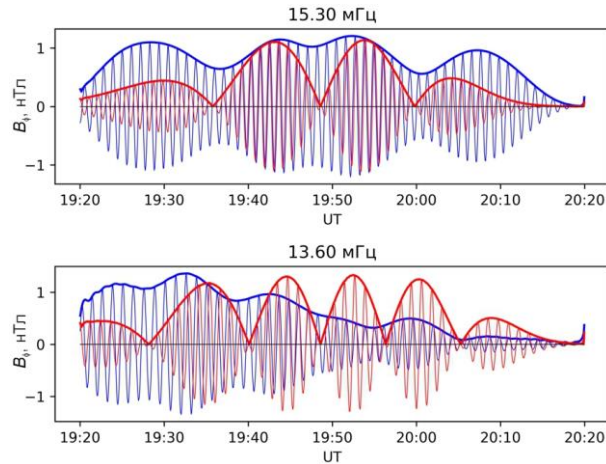


Рис. 8. Азимутальная компонента магнитного поля B_ϕ . Синяя кривая — выделенная с помощью узкополосного фильтра компонента, построенная на основе спутниковых данных, красная — компонента, построенная с помощью аналитического решения. Цифрами обозначены локальные максимумы отгибающих

где $a = L_0/(m\Delta L)$, где ΔL — полуширина резонатора, которую для исследуемого случая можно оценить как $\Delta L = 0.4R_E$ [Mager et al, 2018]. Полагая, что $\Omega_{TN} = \alpha\Omega_{PN}$, преобразуем формулу (21) к виду

$$\frac{\omega_n^2}{\Omega_{PN}^2} = 1 + \frac{1}{2}a^2(2n+1)^2 - \frac{1}{2}a^2(2n+1)^2 \sqrt{1 + 4\frac{1-\alpha^2}{a^2(2n+1)^2}}, \quad (22)$$

Используя полученное выражение, можно найти параметр α для произвольного отношения частот гармоник резонатора ω_{n1}/ω_{n2} , а затем восстановить полоидальную частоту и соответствующую ей тороидальную.

Для $\omega_0 = 15.3$ МГц, $\omega_2 = 13.6$ МГц получаем $\Omega_{PN} = 15.95$ МГц, $\Omega_{TN} = 11.9$ МГц, что полностью совпадает с оценками [Mager et al, 2018]. Для $\omega_2 = 15.3$ МГц, $\omega_4 = 13.6$ МГц получаем $\Omega_{PN} = 19.2$ МГц, $\Omega_{TN} = 10.9$ МГц. Поляризационное расщепление спектра, которое можно определить как отношение разности собственных частот к их полусумме, в случае гармоник

2 и 4 становится довольно большим и составляет 0.55, в то время как для набора 0 и 2 оно меньше, но тоже довольно большое и приблизительно равно 0.29. В холодной плазме наибольшее значение расщепления спектра имеет фундаментальная гармоника собственных альфвеновских колебаний и оно не превышало 0.2 [Leonovich, Mazur, 1993; Kozlov, Leonovich, 2006]. В работе [Klimushkin et al., 2004] была проведена оценка собственных частот в приближении с градиентом газокинетического давления. Как оказалось, если полоидальная частота становится больше тороидальной, поляризационное расщепление может быть значительно больше, чем в холодной плазме (0.5), и зависит от параметров среды.

Следует отметить, что данный результат был получен исключительно с использованием данных измерений магнитного поля, что значительно упрощает анализ. Данные измерений электрического поля, напротив, часто менее стабильны, подвержены различным отклонениям, требуют дополнительной калибровки или нередко оказываются совсем недоступными [Breneman et al, 2022]. Таким образом, данный метод позволяет качественно исследовать пространственную структуру волны по данным одного инструмента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты данной работы.

1. Проведен анализ спутниковых данных для первого случая наблюдения гармоник полоидального альфвеновского резонатора с помощью метода фазовых портретов. Показано, что тогда разность фаз отдельных квазимонохроматических гармоник имеет квазипериодическую структуру, что качественно согласуется с аналитической моделью резонатора и позволяет предположить, что наблюдаемые колебания действительно являются гармониками резонатора.

2. Проведено сопоставление аналитических решений, построенных на основе теории полоидального альфвеновского резонатора, с данными измерений магнитного поля на спутнике RBSP-B. Лучшее соответствие с поперечной структурой гармоник с частотой

тами 15.3 и 13.6 мГц показали аналитические решения для второй и четвертой гармоник полоидального резонатора соответственно.

3. На основе сопоставления аналитических компонент магнитного поля с данными спутника RBSP-B, а также анализа поведения разности фаз сделано предположение, что основной вклад в альфвеновские колебания, наблюдаемые спутником RBSP-B 23 октября 2012 г. в 19:12–20:24 UT, принадлежит, вероятнее всего, второй и четвертой гармоникам полоидального альфвеновского резонатора. Полученные результаты указывают на возможность определения типа альфвеновских волн и анализа их радиальной структуры по данным даже одного космического аппарата.

Автор благодарен рецензенту А.Г. Демехову за ценные замечания, которые значительно улучшили статью. Автор благодарен команде миссии НАСА Van Allen Probes и Крейгу Клетцингу (Craig Kletzing) за возможность использования данных инструмента EMFISIS, а также Д.А. Козлову, Д.Ю. Климушкину и П.Н. Мажеру за полезные обсуждения.

Работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-77-10032.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Вакман Д.Е., Вайнштейн Л.А. Амплитуда, фаза, частота — основные понятия теории колебаний. *Успехи физических наук*. 1977, т. 123, № 4, с. 657–682.
- Поляков С.В., Рапопорт В.О. Ионосферный альфвеновский резонатор. *Геомагнетизм и аэрономия*. 1981, т. 21, № 5, с. 610–614.
- Breneman A.W., Wygant J.R., Tian S., et al. The Van Allen Probes electric field and waves instrument: science results, measurements, and access to data. *Space Sci. Rev.* 2022, vol. 218, no. 8, article id. 69. DOI: [10.1007/s11214-022-00934-y](https://doi.org/10.1007/s11214-022-00934-y).
- Chen L., Hasegawa A. A theory of long-period magnetic pulsations: 1. Steady state excitation of field line resonance. *J. Geophys. Res.* 1974, vol. 79, pp. 1024–1032.
- Cramm R., Glassmeier K.H., Othmer H., et al. A case study of a radially polarized Pc4 event observed by the Equator-S satellite. *Ann. Geophys.* 2000, vol. 18, no. 4, pp. 411–415.
- Eriksson P.T.I., Walker A.D.M., Stephenson J.A.E. A statistical correlation of Pc5 pulsations and solar wind pressure oscillations. *Adv. Space Res.* 2006, vol. 38, no. 8, pp. 1763–1771.
- Glassmeier K.H. Magnetometer array observations of a giant pulsation event. *J. Geophys. Zeitschrift Geophysik*. 1980, vol. 48, no. 3, pp. 127–138.
- Guglielmi A.V., Kangas J., Potapov A.S. Quasiperiodic modulation of the Pc1 geomagnetic pulsations: An unsettled problem. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2001, vol. 106, no. A11, pp. 25847–25855. DOI: [10.1029/2001JA000136](https://doi.org/10.1029/2001JA000136).
- Keiling A. Alfvén Waves and Their Roles in the Dynamics of the Earth's Magnetotail: A Review. *Space Sci. Rev.* 2009, vol. 142, pp. 73–156.
- Kim K.-H., Kim G.-J., Kwon H.-J. Distribution of equatorial Alfvén velocity in the magnetosphere: A statistical analysis of THEMIS observations. *Earth Planets and Space*. 2018, vol. 70, no. 1, p. 174. DOI: [10.1186/s40623-018-0947-9](https://doi.org/10.1186/s40623-018-0947-9).
- Klimushkin D.Y., Mager P.N., Glassmeier K.H. Toroidal and poloidal Alfvén waves with arbitrary azimuthal wave-numbers in a finite pressure plasma in the Earth's magnetosphere. *Ann. Geophys.* 2004, vol. 22, no. 1, pp. 267–287. DOI: [10.5194/angeo-22-267-2004](https://doi.org/10.5194/angeo-22-267-2004).
- Kozlov D.A., Leonovich A.S. Polarization Splitting of the Alfvén wave spectrum in a dipole magnetosphere with a rotating plasma. *Plasma Physics Rep.* 2006, vol. 32, no. 9, pp. 765–774.
- Kozlov D.A., Leonovich A.S., Vlasov A.A. Determining the radial structure of high-m Alfvén wave by means of the “phase portrait” method. *Adv. Space Res.* 2024, vol. 73, no. 1, pp. 624–631.
- Lee D.H., Lysak R.L. Effects of azimuthal asymmetry on ULF waves in the dipole magnetosphere. *Geophys. Res. Lett.* 1990, vol. 17, no. 1, pp. 53–56.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. The spatial structure of poloidal Alfvén oscillations of an axisymmetric magnetosphere. *Planetary and Space Science*. 1990, vol. 43, pp. 1231–1241. DOI: [10.1016/0032-0633\(90\)90128-D](https://doi.org/10.1016/0032-0633(90)90128-D).
- Leonovich A.S., Mazur V.A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere. *Planetary and Space Science*. 1993, vol. 41, pp. 697–717.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. Magnetospheric resonator for transverse-small-scale standing Alfvén waves. *Planetary and Space Science*. 1995, vol. 43, pp. 881–883.
- Leonovich A.S., Mazur V.A. Penetration to the Earth's surface of standing Alfvén waves excited by external currents in the ionosphere. *Ann. Geophys.* 1996, vol. 14, pp. 545–556.
- Leonovich A.S., Zong Q.-Z., Kozlov D.A., et al. “Phase portraits” of Alfvén waves in magnetospheric plasma. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2022, vol. 127, no. 6, p. e2022JA030432.
- Lysak R.L., Yoshikawa A. Resonant cavities and waveguides in the ionosphere and atmosphere. *Magnetospheric ULF Waves: Synthesis and New Directions* / Eds. K. Takahashi, P.J. Chi, R.E. Denton, R.L. Lysak. Washington, American Geophysical Union, 2006, vol. 169, pp. 289–306. DOI: [10.1029/169GM19](https://doi.org/10.1029/169GM19).
- Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Giant pulsations as modes of a transverse Alfvénic resonator on the plasmopause. *Earth, Planets and Space*. 2013, vol. 65, pp. 397–409. DOI: [10.5047/eps.2012.10.002](https://doi.org/10.5047/eps.2012.10.002).
- Mager P.N., Mikhailova O.S., Mager O. V., et al. Eigenmodes of the transverse Alfvénic resonator at the plasmopause: A Van Allen Probes case study. *Geophys. Res. Lett.* 2018, vol. 45, no. 19, pp. 10796–10804. DOI: [10.1029/2018GL079596](https://doi.org/10.1029/2018GL079596).
- Mikhailova O.S., Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Transverse resonator for ion-ion hybrid waves in dipole magnetospheric plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion*. 2020, vol. 62, no. 9, p. 095008. DOI: [10.1088/1361-6587/ab9be9](https://doi.org/10.1088/1361-6587/ab9be9).
- Min K., Takahashi K., Ukhorskiy A.Y., et al. Second harmonic poloidal waves observed by Van Allen Probes in the dusk-midnight sector. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2017, vol. 122, pp. 3013–3039.
- Paschmann G., Daly P.W. Multi-spacecraft analysis methods revisited. *International Space Science Institute*. 2008, 100 p.
- Schumann W.O. Über die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht und einer Ionosphärenhülle umgeben ist. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 1952, vol. 7, no. 2, pp. 149–154. DOI: [10.1515/zna-1952-0202](https://doi.org/10.1515/zna-1952-0202).
- Southwood D.J. Some features of field line resonances in the magnetosphere. *Planetary and Space Science*. 1974, vol. 22, pp. 483–491.
- Southwood D.J., Kivelson M.G. Damping standing Alfvén waves in the magnetosphere. *J. Geophys. Res.* 2001, vol. 106, pp. 10829–10836.
- Stasiewicz K., Bellan P., Chaston C., et al. Small Scale Alfvénic Structure in the Aurora. *Space Sci. Rev.* 2000, vol. 92, pp. 423–533.
- Takahashi K., Oimatsu S., Nosé M., et al. Van Allen Probes observations of second-harmonic poloidal standing Alfvén waves. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2018, vol. 123, pp. 611–637.

Tamao T. Transmission and coupling resonance of hydromagnetic disturbances in the non-uniform Earth's magnetosphere. *Science Reports of Tohoku University*. 1965, vol. 17, pp. 43–54.

Как цитировать эту статью:

Власов А.А. Исследование радиальной структуры полоидального альфвеновского резонатора методом «фазовых портретов» по данным спутника Van Allen Probes. *Солнечно-земная физика*. 2025, т. 11, № 2, с. 69–78. DOI: [10.12737/szf-112202506](https://doi.org/10.12737/szf-112202506).