

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Ордена Трудового Красного Знамени  
Институт солнечно-земной физики  
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 550.510.535

*Климушкин*

**Климушкин Дмитрий Юрьевич**

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА И МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ  
АЗИМУТАЛЬНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫХ УЛЬТРАНИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН В  
КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ**

Специальность 1.3.1 —

«физика космоса, астрономия»

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Иркутск – 2024

# Содержание

<b>Общая характеристика работы . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>Введение . . . . .</b>	<b>24</b>
Классификация УНЧ-волн . . . . .	24
Магнитная гидродинамика . . . . .	24
Кинетика . . . . .	28
УНЧ-волны в наблюдательных данных . . . . .	32
Сцепление ветвей УНЧ-колебаний в неоднородной плазме . . . . .	36
Трансформация полоидальных азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн в тороидальные . . . . .	40
Резонаторы для УНЧ-волн в магнитосфере . . . . .	43
Интерпретация различных типов азимутально-мелкомасштабных УНЧ-волн	46
<b>1 Пространственная структура и источники азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн в магнитосфере . . . . .</b>	<b>56</b>
1.1 Равновесие и система координат . . . . .	56
1.2 Пространственно-временная структура и поляризация альфвеновских волн, возбужденных кинетическими неустойчивостями . . . . .	57
1.2.1 Монохроматические волны. . . . .	58
1.2.2 Внезапный импульс . . . . .	71
1.2.3 В каких случаях возможна генерация полоидальных альфвеновских волн неустойчивостями? . . . . .	76
1.3 Импульсное возбуждение альфвеновских волн . . . . .	79
1.3.1 Импульсный источник конечной длительности . . . . .	79

1.3.2	Внезапный импульс, локализованный на магнитной оболочке . . .	91
1.3.3	Заключение . . . . .	101
1.4	Движущийся источник . . . . .	101
1.4.1	Структура и эволюция волнового поля . . . . .	103
1.4.2	Движение фазы в сторону экватора при наблюдениях полоидальных альфвеновских волн на радарх . . . . .	114
1.5	Выводы к Главе 1 . . . . .	119
<b>2</b>	<b>Сцепление альфвеновской и компрессионной мод: гидродинамическое рассмотрение . . . . .</b>	<b>122</b>
2.1	Сцепление альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн в плазме с тяжелыми ионами . . . . .	123
2.1.1	Система волновых уравнений . . . . .	124
2.1.2	Обсуждение системы сцепленных волновых уравнений . . . . .	127
2.1.3	Осесимметричный альфвеновский резонанс в мультикомпонентной плазме при конечной гирочастоте ионов . . . . .	130
2.1.4	Резонансные частоты в мультикомпонентной плазме . . . . .	135
2.2	Сцепление альфвеновской и медленной магнитозвуковой мод . . . . .	137
2.2.1	Основные уравнения . . . . .	137
2.2.2	Область локализации медленного магнитного звука . . . . .	140
2.2.3	Продольная структура ММЗ в ВКБ приближении . . . . .	144
2.2.4	Пространственная структура медленных магнитозвуковых мод при $m \gg 1$ . . . . .	146
2.3	Гидромагнитная неустойчивость сцепленных альфвеновской и медленной магнитозвуковой мод колебаний в корональных арках в солнечной короне . . . . .	147
2.3.1	Основные уравнения . . . . .	148
2.3.2	Альфвеновские и ММЗ-собственные функции . . . . .	151
2.3.3	Дисперсионное уравнение для сцепленных МГД-мод . . . . .	152
2.3.4	Радиальная структура неустойчивых мод . . . . .	156

2.4 Выводы к Главе 2 . . . . .	162
<b>3 Сцепление альфвеновской и компрессионной мод: кинетическое рассмотрение . . . . .</b>	<b>164</b>
3.1 Альфвеновская и дрейфово-компрессионная моды . . . . .	164
3.1.1 Основные уравнения . . . . .	165
3.1.2 Области локализации альфвеновской и дрейфово-компрессионной мод . . . . .	170
3.1.3 За пределами ВКБ-приближения: структура вблизи резонансных поверхностей . . . . .	175
3.1.4 Альфвеновские неустойчивости при учете сцепления с компрессионной модой . . . . .	177
3.1.5 Итоги . . . . .	180
3.2 Баллонная неустойчивость сцепленных альфвеновских и компрессионных мод . . . . .	181
3.3 Альфвеновская и зеркальная моды . . . . .	185
3.3.1 Основные уравнения . . . . .	186
3.3.2 Сцепление альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод пренебрежимо мало . . . . .	189
3.3.3 Слабое, но ненулевое сцепление альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод . . . . .	190
3.3.4 Сильное сцепление альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод . . . . .	191
3.3.5 Поперечная дисперсия сцепленных альфвеновских и зеркально-дрейфовых мод . . . . .	194
3.4 Продольное электрическое поле, обусловленное сцеплением альфвеновской и компрессионной мод . . . . .	200
3.4.1 Исходные уравнения . . . . .	201
3.4.2 Продольное электрическое поле альфвеновской волны в неоднородной плазме . . . . .	203
3.5 Выводы к Главе 3 . . . . .	205

<b>4 Резонаторы для компрессионных волн в магнитосфере . . . . .</b>	<b>207</b>
4.1 Резонаторы для зеркально-дрейфовой моды . . . . .	208
4.1.1 Роль сцепления мод . . . . .	208
4.1.2 Роль конечного ларморовского радиуса . . . . .	213
4.2 Резонаторы для дрейфово-компрессионной моды . . . . .	220
4.3 Выводы к Главе 4 . . . . .	221
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>223</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>226</b>

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы исследования

Одним из основных элементов околоземного космоса являются ультранизкочастотные (УНЧ) волны, или геомагнитные пульсации — открытые еще в XIX веке колебания в магнитного поля Земли с периодами от нескольких секунд до десятков минут.

УНЧ-волны генерируются посредством разнообразных механизмов — как внешних (по отношению к магнитосфере), так и внутренних. Внешние механизмы относятся в основном к азимутально-крупномасштабным волнам, имеющим малое значение азимутального волнового числа ( $m \sim 1$ ). Эти механизмы так или иначе связаны с взаимодействием магнитосферы с солнечным ветром. Это импульсы динамического давления солнечного ветра [Atkinson and Watanabe, 1966; Мишин и др., 2013] и гидромагнитные неустойчивости на границе магнитосферы, такие, как неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [Wilson and Sugiura, 1961; Mishin, 1981; Мазур и Чуйко, 2011], Крускала-Шварцшильда [Plaschke and Glassmeier, 2011] и Рэлея-Тейлора [Гульельми и др., 2010; Mishin, 1993]. Для волн с периодами в несколько десятков секунд предполагается также большая роль некоторых кинетических неустойчивостей, в частности, неустойчивости отраженных протонов перед фронтом околоземной ударной волны [Потапов, 1974; Гульельми, 1984]. Возможен также непосредственный переход в магнитосферу волн из солнечного ветра [Мазур, 2010; Leonovich et al., 2003; Potapov, 2013].

Внутримангнитосферные механизмы генерации УНЧ-волн относятся к азимутально-мелкомасштабным волнам, то есть волнам с большими значени-

ями азимутального волнового числа ( $m \gg 1$ ). Эти механизмы включают в себя различные плазменные неустойчивости, связанные с передачей волнам энергии дрейфующих в магнитосфере высокоэнергичных частиц с немаксвелловскими функциями распределения [Hasegawa, 1969; Михайловский и Похотелов, 1975]. Эти неустойчивости могут быть обусловлены сильными пространственными градиентами функции распределения [Rubtsov et al., 2021; Mager, 2021], наличием пучков частиц с инверсным характером функции распределения [Hughes et al., 1978; Mager et al., 2018], а также анизотропией тензора давления [Cooper et al., 2021]. К числу внутренних источников относятся также переменные токи, связанные с движением неоднородностей кольцевого тока или облаков частиц, инжектированными в магнитосферу во время суббурь [Золотухина, 1974]. К этой группе источников естественно отнести также процессы внутри ионосферы [Сафаргалеев и Мальцев, 1987; Leonovich and Mazur, 1993] и гидродинамические неустойчивости в районе плазмопаузы [Ковнер и др., 1977; Viñas and Madden, 1986].

УНЧ-волны принимают непосредственное участие во многих магнитосферных процессах. Так, они являются одним из основных каналов магнитосферно-ионосферного взаимодействия, меняя проводимость ионосферы полярных регионов посредством модуляции потоков высыпающихся частиц [Ляцкий и Мальцев, 1983; Hiraki and Watanabe, 2011; Pilipenko et al., 2014]. Кроме того, они могут генерировать параллельные электрические поля, играющие большую роль в ускорении электронов, вызывающих полярные сияния. Предполагается важная роль УНЧ-волн в квазивязкой передаче энергии и импульса магнитосфере от солнечного ветра [Мишин и Матюхин, 1986; Леонович и Мишин, 1999; Leonovich et al., 2003; Leonovich, 2012; Faganello and Califano, 2017]. Связанные с УНЧ-волнами неустойчивости могут играть значительная роль в инициации суббурь [Samson et al., 1992; Antonova et al., 2009; Rae et al., 2014; Головчанская и др., 2018].

Имеется ряд экспериментальных данных и теоретических указаний, что УНЧ-волны играют значительную роль в ускорении заряженных частиц полярного вет-

ра, кольцевого тока и радиационных поясов [Ковтюх, 1998; Mathie and Mann, 2001; Guglielmi and Lundin, 2001; Потапов и др., 2012; Гульельми и Фейгин, 2018; Кропоткин, 2021]. Некоторые из электронов радиационных поясов имеют релятивистские энергии (порядка нескольких десятков МэВ) и потому могут причинять значительный вред аппаратуре, установленной на космических аппаратах. По этой причине знание ускорительных механизмов в магнитосфере, в частности роли УНЧ-волн, имеет большое значение для прогнозов космической погоды.

С другой стороны, роль УНЧ-волн в теории земной магнитосферы аналогична роли сейсмических волн в теории внутреннего строения Земли: они позволяют исследовать удаленные области пространства, недоступные непосредственным измерениям [Гульельми и Троицкая, 1973]. В частности, частоты наблюдаемых УНЧ-волн отражают распределение плотности плазмы вдоль силовых линий [Denton et al., 2006; Menk and Waters, 2013] и плазменного давления поперек магнитных оболочек [Vetoulis and Chen, 1994]. Без знания этих параметров составление надежных прогнозов космической погоды не представляется возможным.

Помимо земной магнитосферы, УНЧ-волны были зарегистрированы и в магнитосферах ряда других планет солнечной системы [Glassmeier and Espley, 2006]. Волны той же природы зафиксированы в солнечной короне [Mathioudakis et al., 2013]. Аналогия между процессами распространения и генерации волн в земной атмосфере и солнечной короне позволяет прояснить ряд аспектов физики солнечной атмосферы [Nakariakov et al., 2016].

Таким образом, УНЧ-волны следует признать важным и универсальным феноменом космической плазмы. Для понимания их природы и роли в активных процессах в земной магнитосфере необходимо развитие теории УНЧ-волн.

В однородной плазме возможно распространение трех независимых мод УНЧ-колебаний: альфвеновской моды, быстрых магнитозвуковых волн и медленных магнитозвуковых волн (БМЗ и ММЗ). Эти моды являются решениями уравнений магнитной гидродинамики и потому называются гидромагнитными (МГД-модами). Однако магнитосфера существенно неоднородна: параметры плазмы и магнитного

поля меняются и вдоль силовых линий, поперек магнитных оболочек, в азимутальном направлении. В неоднородной плазме три МГД-моды взаимосвязаны (сцеплены) и возможна передача энергии от одних мод другим [Alperovich and Fedorov, 2007; Леонович и Мазур, 2016]. Другим следствием неоднородности плазмы является появление дрейфовых мод, частота которых определяется кинетическими эффектами: зеркально-дрейфовая и дрейфово-компрессионная моды [Михайловский и Фридман, 1967; Hasegawa, 1969].

Неоднородность плазмы оказывает большое влияние на спектральные свойства альфвеновских колебаний: частоты собственных стоячих колебаний силовых линий различны (поляризационное расщепление спектра) [Radoski, 1967]. Результатом поляризационного расщепления спектра является специфическая поперечная дисперсия альфвеновских волн [Leonovich and Mazur, 1990]; это явление не имеет аналога как в однородной плазме, так и в неоднородной плазме с прямыми силовыми линиями, где дисперсия целиком обусловлена кинетическими эффектами. Поперечная дисперсия альфвеновских волн приводит к их распространению поперек магнитных оболочек, в ходе которого меняется их поляризация [Leonovich and Mazur, 1993].

Важным следствием неоднородности магнитосферной плазмы является существование волновых резонансов. Под этим подразумевается, что у некоторых мод энергия почти полностью сосредоточена на особых магнитных поверхностях, где собственная частота той или иной ветви колебаний (например, альфвеновской или ММЗ) совпадает с частотой источника волны [Тамао, 1965]. Высокие амплитуды волн на резонансных поверхностях могут обуславливать высокоэффективное ускорение заряженных частиц кольцевого тока, радиационных поясов и авроральных регионов. С другой стороны, неоднородность плазмы делает возможным запираание волновой энергии по некоторым координатам — обычно вдоль силовых линий и поперек магнитных оболочек [Дмитриенко и др., 1986]. Таким образом формируются резонаторы — области магнитосферы, где волновая энергия распространяется только вдоль азимута, будучи замкнутой поперек магнитных оболочек и поперек

магнитных оболочек. В случае альфвеновских волн и ММЗ запираение вдоль силовых линий обусловлено наличием плотной высокопроводящей ионосферы, в случае БМЗ — продольным градиентом плотности плазмы. Запираение поперек магнитных оболочек возможно при условии наличия поперечной дисперсии волны, то есть зависимости частоты волны от поперечной компоненты волнового вектора. У БМЗ такая дисперсия имеется уже в однородной плазме, у других мод она может быть связана с неоднородностью плазмы и различными кинетическими эффектами. Резонаторы для УНЧ-волн являются естественными накопителями волновой энергии в магнитосфере, которая может быть израсходована, например, на ускорение заряженных частиц или модуляцию проводимости ионосферы. Поэтому изучение резонаторов имеет большое значение в физике космической плазмы.

Среди УНЧ-волн выделяется особая группа — азимутально-мелкомасштабные волны, или волны с большими азимутальными волновыми числами,  $m \gg 1$ . Как уже говорилось, эти волны генерируются внутренними процессами в магнитосфере. УНЧ-волны этого типа особенно эффективно взаимодействуют с заряженными частицами: во-первых, они обладают значительной азимутальной компонентой электрического поля, благодаря чему возможен эффективный обмен энергией с частицами, дрейфующими в азимутальном направлении; во-вторых, во многих случаях они имеют заметную продольную компоненту магнитного поля, что позволяет задействовать бетатронный механизм ускорения частиц [Tamao, 1984]. С точки зрения диагностики магнитосферы особое значение имеет то, что пространственная структура азимутально-мелкомасштабных волн особенно чувствительна к геометрии геомагнитного поля [Leonovich and Mazur, 1993; Мазур и др., 2004; Mager et al., 2009].

Исследование активной роли УНЧ-волн в космической плазме требует знания их пространственной структуры, эволюции со временем, механизмов генерации.

Таким образом, рассмотрение этих вопросов является одной из актуальных проблем современной физики околоземного космического пространства.

## Цель работы

Целью настоящей диссертационной работы является комплексное теоретическое исследование ультранизкочастотных волн в аксиально симметричной модели магнитосферы в рамках как магнитогидродинамического, так и кинетического подхода. Рассматривается пространственная структура волнового поля и механизмы генерации волн импульсными источниками и кинетическими и МГД-неустойчивостями. При этом учитывается неоднородность плазмы и магнитного поля поперек магнитных оболочек и вдоль силовых линий, конечное давление плазмы, ее анизотропия, взаимодействие волна-частица. Конкретно, были поставлены следующие задачи:

- Теоретически исследовать пространственно-временную структуру альфвеновских волн с учетом неустойчивости за счет взаимодействия «волна-частица» при наличии неравновесных популяций высокоэнергичных частиц с учетом кривизны силовых линий и конечного давления плазмы. При этом рассматриваются волны, генерированные как монохроматическим, так и импульсным источниками.
- Определить полную пространственную структуру волнового поля стоячих азимутально-мелкомасштабных альфвеновских колебаний, генерированных нестационарными источниками разного типа: источником конечной длительности, широко распределенным по радиальной координате, внезапным импульсом, локализованным на отдельной магнитной оболочке, и источником, движущимся по азимутальной координате.
- Изучить влияние на пространственную структуру стоячих медленных магнитозвуковых волн сцепления с альфвеновской модой в модели плазмы, учитывающей кривизну силовых линий и неоднородность плазмы. Применить полученные результаты для изучения устойчивости корональных арок на Солнце относительно гофрированных колебаний.

- Изучить сцепление альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн в магнитосфере, обогащенной тяжелыми ионами. Применить полученные результаты к магнитосфере Меркурия, плазма которой обогащена ионами натрия, выбиваемыми с поверхности планеты солнечным излучением. Выяснить природу резонансных колебаний в магнитосфере Меркурия.
- Изучить сцепление альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод в рамках гирокинетики в цилиндрической модели магнитосферы. Исследовать неустойчивости сцепленных мод за счет взаимодействия волна-частица, рассмотреть пространственную структуру этих мод. Изучить условия кинетического аналога баллонной неустойчивости, возникающей при сцеплении альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод. Наблюдательными проявлениями в земной магнитосфере дрейфово-компрессионных мод могут являться буревые компрессионные волны типа Pc5, регулярно наблюдаемые с помощью спутников и радаров.
- Изучить сцепление альфвеновских и зеркально-дрейфовых мод в рамках гирокинетики, возникающих в бесстолкновительной плазме при учете анизотропии тензора давления в одномерно-неоднородной модели магнитосферы. Исследовать условия плазменных неустойчивостей, имеющих место при сцеплении этих мод. Наблюдательными проявлениями зеркально-дрейфовых мод могут являться как буревые компрессионные волны типа Pc5 в магнитосфере Земли, так и некоторые разновидности волн в переходном слое.
- Изучить возможность существования в магнитосфере резонаторов для компрессионных мод кинетической природы (дрейфово-компрессионных и зеркально-дрейфовых мод). В таких резонаторах волновая энергия распространяется только вдоль азимута, будучи замкнутой поперек магнитных оболочек и вдоль силовых линий.

## Научная новизна

В каждой части представленного в настоящей работе исследования имеется ряд новых результатов.

1. При изучении кинетических неустойчивостей, генерирующих азимутально-мелкомасштабные альфвеновские волны, структура возникающей волны обычно оставалась без внимания. Наоборот, при изучении структуры волнового поля обычно не учитываются неустойчивости. В нашей работе обе проблемы рассмотрены единым образом: изучена структура волнового поля альфвеновских колебаний, генерированных неустойчивостью. Вывод оказался достаточно парадоксальным: из-за трансформации волны из полоидальной в тороидальную наиболее усиленными оказываются не полоидальные, а тороидальные альфвеновские колебания (хотя инкремент неустойчивости максимален именно для полоидальных колебаний). Как известно, эта трансформация может быть обусловлена двумя факторами: поляризационным расщеплением спектра из-за кривизны силовых линий (для монохроматических волн) и разбеганием начального возмущения по фазам (для импульсно-генерированных волн). С другой стороны, большая роль кинетических неустойчивостей в генерации полоидальных колебаний, по всей видимости, подтверждается экспериментом. Это позволяет сделать важный вывод, что основная часть наблюдаемых полоидальных колебаний являются модами поперечного альфвеновского резонатора, возникновение которого связано с кривизной силовых линий и конечным плазменным давлением. Для резонаторных мод трансформация из полоидальной в тороидальную моду не должна иметь место.
2. Впервые изучено становление пространственной структуры полоидальных альфвеновских волн, когда одновременно имеют место разные виды трансформации из полоидальной в тороидальную моду, обусловленные различными факторами: поляризационным расщеплением спектра и разбеганием по фазам. Для этого рассмотрен источник альфвеновской волны в виде квазимонохрома-

тического волнового пакета конечной длительности, учтена кривизна силовых линий магнитного поля. До сих пор источник такого типа рассматривался только для тороидальных альфвеновских волн и плоской геометрии магнитного поля, когда связанная с поляризационным расщеплением спектра трансформация альфвеновских волн не имеет места. Впервые изучена пространственно-временная структура альфвеновских волн, генерированных импульсом поверхностного тока на границе магнитосферы, аналогичным тому, который возникает при резком сжатии магнитосферы импульсом давления солнечного ветра.

3. При изучении медленных магнитозвуковых волн (ММЗ) в магнитосфере основной упор обычно делался на их структуру вдоль силовых линий. Поперечная структура ММЗ была исследована только в рамках простейших (одномерно-неоднородных моделей) среды. В данной работе была исследована структура в рамках более реалистичных моделей, учитывающих кривизну силовых линий. Поперечная дисперсия ММЗ в этом случае вызвана сцеплением с альфвеновской модой. Результаты этого исследования были приложены для анализа неустойчивости сцепленных мод в плазме конечного давления. В качестве примера была избрана гофрировочная неустойчивость корональных арок на Солнце, поскольку для ее изучения можно ограничиться простой моделью с постоянной кривизной силовых линий. Были получены условия неустойчивости, рассмотрена структура неустойчивых мод поперек магнитных оболочек. Кроме того, было впервые изучено сцепление альфвеновской и быстрой магнитозвуковой мод (БМЗ) в плазме магнитосферы Меркурия, обусловленное ее обогащенностью тяжелыми ионами (в основном, ионами натрия). Впервые получено резонансное условие для меркурианской магнитосферы, аналогичное условию альфвеновского резонанса в земной магнитосфере.
4. Систематического изучения влияния сцепления альфвеновской и дрейфово-компрессионных мод на их пространственную структуру и условия неустойчивости до сих пор не производилось. В работе показано, что одним из следствий такого сцепления является кинетический аналог баллонной неустойчи-

ности. Определены условия развития этой неустойчивости, показаны ее отличия от гидродинамической баллонной неустойчивости. Кроме того, сцепление альфвеновских и зеркально-дрейфовых мод до сих пор изучалось только на конкретных примерах. В работе показано, что следствием этого сцепления является возникновение новых мод колебаний, частота которых имеет реальную и мнимую части, и которые при определенных условиях могут раскачиваться из-за неустойчивости.

5. Еще одним важным следствием сцепления альфвеновской моды с компрессионной в неоднородной плазме, не изученным ранее, является появление параллельного электрического поля, значительно более сильного, чем в однородной плазме. Обычно появление у альфвеновской волны параллельного электрического поля изучается посредством уравнения квазинейтральности плазмы, в котором есть два слагаемых: одно связано с поперечным электрическим полем волны, имеющим вихревую природу, и второе — с электростатическим, потенциальным полем. Первое слагаемое естественно ассоциируется с альфвеновской волной, второе приводит к появлению параллельного электрического поля. В нашем подходе в уравнении квазинейтральности появляется еще одно, третье слагаемое, отвечающее за продольное магнитное поле волны. Это слагаемое обусловлено сцеплением альфвеновской моды с компрессионной.
6. В работе предложена концепция резонаторов поперек силовых линий для компрессионных мод кинетической природы (дрейфово-компрессионных и зеркально-дрейфовых мод). До сих пор изучались только резонаторы для ультранизкочастотных мод других типов: быстрой магнитозвуковой и альфвеновских мод. Однако резонаторы для кинетических компрессионных мод могут иметь очень большое значение, поскольку с такими модами может ассоциироваться важная разновидность УНЧ-волн в магнитосфере: буревые компрессионные пульсации типа Pc5, которые могут отвечать на ускорение частиц радиационных поясов и некоторые виды авроральных явлений.

## **Научная и практическая значимость работы**

Научная ценность диссертации определяется тем, что в ней в рамках МГД и кинетического приближения построена теория УНЧ волн в моделях магнитосферы с учетом таких факторов, как конечное давление неоднородной плазмы, кривизна силовых линий и взаимодействие волн и частиц. В рамках этой модели исследованы моды УНЧ-колебаний, которые могут вносить значительный вклад в общее волновое поле магнитосферы: альфвеновские волны, быстрый и медленный магнитный звук, дрейфово-компрессионные и зеркально-дрейфовые моды. Данная работа может стать основой для развития теории УНЧ-волн в еще более сложных и более реалистичных моделях магнитосферы.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные в ней результаты могут быть использованы в целях прогноза космической погоды. Так, УНЧ-волны разных типов могут ускорять частицы космической плазмы до высоких (вплоть до релятивистских) энергий, который могут представлять опасность для космических аппаратов. Кроме того, сами УНЧ-волны могут служить индикаторами активных процессов в магнитосфере Земли. Тем самым, они представляют большой интерес с точки зрения разработки методов диагностики околоземного космоса.

Поскольку физическая постановка задачи при изучении волновых процессов во внешних слоях солнечной атмосферы очень близка к постановке задачи при исследовании УНЧ-колебаний земной магнитосферы, некоторые результаты диссертационной работы, помимо геофизических приложений, могут быть использованы и в физике Солнца.

## **Достоверность результатов**

Достоверность результатов, представленных в диссертационной работе, обусловлена использованием хорошо разработанных математических методов. Результаты работы согласуются с предыдущими исследованиями, а в предельных случаях

сводятся к известным классическим выражениям. Развитые в работе теоретические представления в основных чертах соответствуют данным экспериментов. Все представленные в диссертации результаты опубликованы в ведущих отечественных и зарубежных научных журналах.

### **Личный вклад автора**

Постановка задачи во всех работах, на основании которых написана диссертация, принадлежит автору. Автору принадлежит решающая роль в математической разработке соответствующих теорий и интерпретации полученных результатов. Все статьи, на которых основана диссертационная работа, были написаны лично автором, даже если он и не являлся первым соавтором.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Определена пространственная структура и эволюция во времени альфвеновских волн, генерированных плазменными неустойчивостями при взаимодействии волна-частица, с учетом нестационарности источника, конечного давления плазмы, кривизны силовых линий.
2. Установлена пространственно-временная структура поля альфвеновских колебаний, генерированных нестационарными источниками различного типа: квазимонохроматический волновой пакет конечной длительности, импульс поверхностного тока на магнитопаузе, движущаяся неоднородность кольцевого тока.
3. Выявлена пространственная структура сцепленных альфвеновских и компрессионных (быстрых и медленных магнитозвуковых) волн в рамках магнитной гидродинамики в реалистичных моделях магнитного поля. Применение построенной теории к анализу волнового поля в магнитосфере Меркурия и корональных арок в солнечной атмосфере.

4. Определены пространственные структуры и условия неустойчивости сцепленных альфвеновских и компрессионных (зеркально-дрейфовых и дрейфово-компрессионных) волн в рамках кинетического подхода с учетом поперечной неоднородности плазмы, кривизны силовых линий и взаимодействия волна-частица.
5. Обоснована возможность существования в космической плазме резонаторов поперек силовых линий для зеркально-дрейфовых и дрейфово-компрессионных мод, где поперечная дисперсия обусловлена сцеплением с альфвеновской модой или конечным ларморовским радиусом.

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертации представлялись на семинарах ИСЗФ СО РАН и ИФЗ РАН, а также на ряде российских и международных научных конференций, а том числе:

- Международный семинар «Низкочастотные волновые процессы в космической плазме», Звенигород, 2007;
- Школа-конференция «Проблемы геокосмоса», Санкт-Петербург, 2004, 2016, 2021 гг.;
- Всероссийская конференция «Физика плазмы в Солнечной системе», Москва, 2016, 2020 и 2024 гг.;
- Международный семинар «50 лет теории резонансного сцепления мод», Япония, Фукуока, 2011 г.;
- Международная конференция «Динамические процессы в космической и астрофизической плазмах», Израиль, Иерусалим, 2012 г.;
- Международные конференции по суббурям: Германия, Люнебург, 2012 г.; Тромсё, Норвегия, 2019 г.;
- Международная конференция «Жизнь со звездой», Иркутск, 2013 г.;

- Международная конференция «Магнитосферные взаимодействия на дневной стороне», Китай, Ченду, 2017 г.;
- Международная конференция «Низкочастотные волны в космической плазме», Корея, Чеджу, 2014 г.;
- Генеральная ассамблея Европейского геофизического союза, Австрия, Вена, 2018 г.;
- Объединенная научная ассамблея Международной ассоциации по геомагнетизму и аэрономии и Международной ассоциации сейсмологии, Индия, 2021 г.;
- Международная конференция «Достижения в понимании альфвеновских волн в гелиосфере», Германия, Берлин, 2023 г.

и ряде других.

Непосредственно теме диссертации соответствует более 70 работ, опубликованных при участии автора в ведущих отечественных и зарубежных научных журналах.

## Публикации

Материалы, используемые в диссертации, опубликованы в 20 печатных работах:

1. Климушкин Д.Ю. Моды гидромагнитных колебаний неоднородной бесстолкновительной плазмы конечного давления // Физика плазмы. — 2006. — Т. 32. — С. 321–329.
2. Магер П.Н., Климушкин Д.Ю. Генерация альфвеновских волн движущейся неоднородностью плазмы в магнитосфере // Физика плазмы. — 2007. — Т. 33. — С. 435–442.
3. Черемных О.К., Климушкин Д.Ю., Костарев Д.В. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом маг-

- нитном поле. Моды с непрерывным спектром // Кинематика и физика небесных тел. — 2014. — Т.30. — С. 3–21.
4. Черемных О.К., Климушкин Д.Ю., Магер П.Н. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с дискретным спектром // Кинематика и физика небесных тел. — 2016. — Т. 32. — С. 26–39.
  5. Glassmeier K.-H., Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Concerning ULF pulsations in Mercury's magnetosphere // *Geophys. Res. Lett.* — 2003. — Vol. 30, no. 18.
  6. Klimushkin D.Yu. The propagation of high-m Alfvén waves in the Earth's magnetosphere and their interaction with high-energy particles // *J. Geophys. Res.* — 2000. — Vol.105. — P. 23303–23310.
  7. Klimushkin D.Yu., Mager P.N. The spatio-temporal structure of impulse-generated azimuthally small-scale Alfvén waves interacting with high-energy charged particles in the magnetosphere // *Ann. Geophys.* — 2004. — Vol. 22.— P. 1053–1060,
  8. Klimushkin D.Yu. Spatial structure and dispersion of drift mirror waves coupled with Alfvén waves in a 1-D inhomogeneous plasma // *Ann.Geophys.* — 2006. — Vol. 24.— pp. 2291-2297.
  9. Klimushkin D.Yu., Chen L. Eigenmode stability analysis of drift-mirror modes in nonuniform plasmas // *Ann. Geophys.* — 2006. — V. 24. — P. 2435–2439.
  10. Klimushkin D.Yu., Mager P.N., Glassmeier K.-H. Axisymmetric Alfvén resonances in a multi-component plasma at finite ion gyrofrequency // *Ann. Geophys.* — 2006. — Vol. 24. — P. 1077-1084.
  11. Klimushkin D.Yu. How energetic particles construct and destroy poloidal high-m Alfvén waves in the magnetosphere // *Planet. Space Sci.* — 2007. — Vol. 55.— P. 722–730.

12. Klimushkin D.Yu., Podshibyakin I.Yu., Cao Jin Bin. Azimuthally small-scale Alfvén waves in magnetosphere excited by the source of finite duration // *Earth Planets Space*. — 2007. — Vol. 59. — P. 951–959.
13. Klimushkin D.Yu., Mager P.N. On the spatial structure and dispersion of slow magnetosonic modes coupled with Alfvén modes in planetary magnetospheres due to field line curvature // *Planet. Space Sci.* — 2008. — V. 56. — P. 1273–1279.
14. Mager P.N., Klimushkin D.Yu., Ivchenko N. On the equatorward phase propagation of high-m ULF pulsations observed by radars // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2009. — Vol. 71. — P. 1677–1680.
15. Klimushkin D.Yu., Mager P.N. Spatial structure and stability of coupled Alfvén and drift compressional modes in non-uniform magnetosphere: gyrokinetic treatment // *Planet. Space Sci.* — 2011. — Vol. 59. — P. 1613–1620.
16. Klimushkin D.Yu., Mager P.N. Coupled Alfvén and drift-mirror modes in non-uniform space plasmas: a gyrokinetic treatment // *Plasma Phys. Control. Fusion*. — 2012. — V. 54. — 015006 (10pp).
17. Klimushkin D.Yu., Mager P.N. and Glassmeier K.-H. Spatio-temporal structure of Alfvén waves excited by a sudden impulse localized on an L-shell // *Ann. Geophys.* — 2012. — Vol. 30. — P. 1099–1106.
18. Klimushkin D.Yu., Mager P.N., Pilipenko V.A. On the ballooning instability of the coupled Alfvén and drift compressional modes // *Earth Planets Space*. — 2012. — Vol. 64. — P. 777–781.
19. Klimushkin D.Yu., Mager P.N. The Alfvén wave parallel electric field in non-uniform space plasmas // *Astrophysics and Space Science*. — 2014. — Vol. 350. — P. 579–583.
20. Klimushkin D.Yu., Nakariakov V.M., Mager P.N., Cheremnykh O.K. Corrugation instability of a coronal arcade // *Solar Phys.* — 2017. — Vol. 292. — P. 184.

## Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, четырех глав и заключения.

Во **Введении** рассказано о современном состоянии изучения азимутально-мелкомасштабных волн в магнитосфере, отмечены основные проблемы, пока не имеющие окончательного решения.

В **главе 1** рассматривается пространственная структура и механизмы генерации азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн в магнитосфере. Рассмотрено влияние кинетических неустойчивостей на структуру альфвеновских волн, возбуждение волн импульсными и движущимися источниками.

В **главе 2** изучается сцепление альфвеновских и компрессионных (магнитозвуковых) волн в неоднородной плазме в рамках магнитной гидродинамики. В частности, рассматривается сцепление альфвеновских мод и ММЗ в плазме конечного давления в кривом магнитном поле. В качестве примера рассматривается гидромагнитная неустойчивость сцепленных мод колебаний корональных арок в солнечной короне. Изучено также сцепление альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн в магнитосфере при учете примеси тяжелых ионов.

**Глава 3** посвящена изучению сцепления альфвеновских и компрессионных (магнитозвуковых) волн в неоднородной плазме в рамках гирокинетики. В частности, рассмотрено сцепление альфвеновской и дрейфово-компрессионной мод, а также аналог баллонной неустойчивости, который может возникать благодаря этому сцеплению. Детально изучено сцепление альфвеновской и дрейфово-зеркальной мод в неоднородной плазме. Показана важная роль эффектов сцепления для генерации продольного электрического поля альфвеновских волн.

Наконец, **глава 4** посвящена изучению резонаторов для компрессионных мод в рамках кинетики. Такие резонаторы могут играть большую роль как резервуары волновой энергии в магнитосфере.

Основные результаты диссертационной работы приведены в **Заключении**.

## **Благодарности**

Автор глубоко благодарен Павлу Николаевичу Магеру, совместно с которым получен ряд результатов, вошедших в диссертацию. Большую роль сыграли плодотворные обсуждения и споры с Анатолием Сергеевичем Леоновичем. Некоторые задачи, рассмотренные в диссертации, возникли в результате сотрудничества с В.А. Пилипенко, К.-Х. Глассмайером, Л. Ченом, Т. Йоманом, К.-Г. Зонгом. Взгляды автора на природу ультранизкочастотных волновых процессов в космической плазме формировались в ходе бесед с А.С. Потаповым, В.В. Мишиным, Н.А. Золотухиной, О.А. Похотеловым, Е.А. Федоровым, Н.Г. Мазуром, О.В. Козыревой, О.К. Черемных, О.С. Парновским, О.В. Агапитовым, В.М. Накаряковым.

Большую помощь в оформлении работы оказала О.С. Михайлова.

Моя работа по физике околоземного космоса была бы невозможна без содействия моего учителя Виталия Айзиковича Мазура (1946–2015).

# Введение

## Классификация УНЧ-волн

Первооткрывателем геомагнитных пульсаций считается один из пионеров солнечно-земной физики Балфор Стюарт (1859 г.), хотя отдельные случаи наблюдения таких волн отмечались еще в XVIII веке [Kangas et al., 1998]. Поскольку колебания этого диапазона (периоды от 1/5 до 600 секунд) обнаруживаются не только в данных по магнитному полю, но и в радарных, оптических, электрических и других данных, в настоящее время более популярным является название *ультранизкочастотные (УНЧ) волны*. Долгие годы природа УНЧ-волн была предметом оживленных дискуссий [Ваньян и др., 1973], однако после работ Джима Данжи (1954 г.) стало ясно, что большинство из них представляют собой магнитогидродинамические (МГД) колебания земной магнитосферы [Dungey, 1954].

## Магнитная гидродинамика

В одножидкостной МГД существует три моды колебаний: альфвеновская мода, быстрый магнитный звук (БМЗ) и медленный магнитный звук (ММЗ). Альфвеновские волны переносят энергию практически вдоль направления магнитного поля со скоростью  $v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ , называемой альфвеновской (здесь  $B$  и  $\rho$  – соответственно, равновесное магнитное поле и плотность плазмы). Дисперсионное уравнение альфвеновских волн имеет вид

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота волны,  $k_{\parallel}$  — компонента волнового вектора, параллельная магнитному полю. Схема колебаний возмущения магнитного поля  $b$  и тока  $j$  в альфвенов-

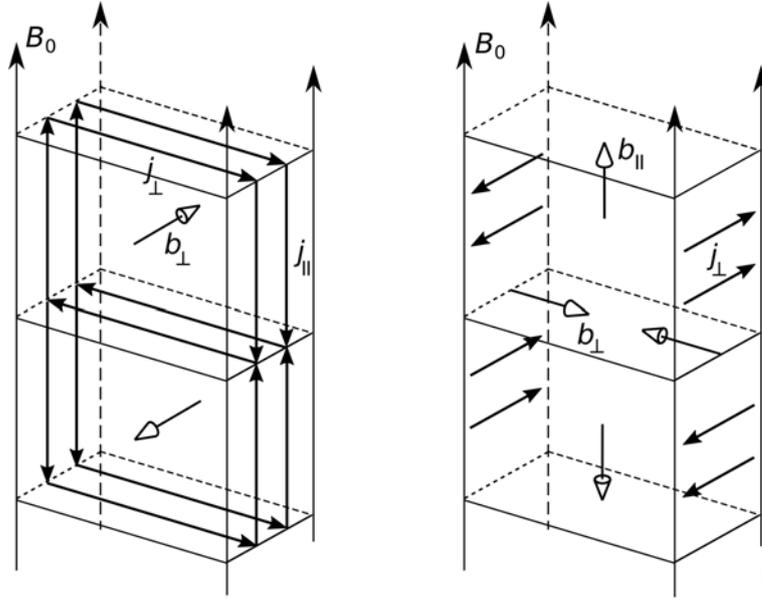


Рисунок 1. Схема колебаний возмущения магнитного поля  $b$  и тока  $j$  в альфвеновских волнах (слева) и магнитном звуке (справа)

ских волнах показано на рис. 1, слева. Эти волны представляют собой колебания силовых линий, аналогичные колебаниям гитарных струн, причем роль силы натяжения струны играет натяжение магнитного поля. Именно с альфвеновскими волнами обычно ассоциируется подавляющее большинство геомагнитных пульсаций.

Два других вида МГД-волн носят название быстрый и медленный магнитный звук (БМЗ и ММЗ). Дисперсионное уравнение этих мод имеет вид

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (v_S^2 + v_A^2) + k_{\parallel}^2 k^2 v_S^2 v_A^2 = 0,$$

где  $v_S$  — скорость звука и  $k$  — полный волновой вектор. Это биквадратное уравнение имеет два корня:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ k^2 (v_S^2 + v_A^2) \pm \sqrt{k^4 (v_S^2 + v_A^2)^2 - 4k_{\parallel}^2 k^2 v_S^2 v_A^2} \right].$$

Верхний знак соответствует БМЗ, нижний — ММЗ. Приведем также выражения для продольной (индекс  $\parallel$ ) и поперечной (индекс  $\perp$ ) компонент групповой скорости этих мод:

$$v_{gr\parallel} = \mp \frac{k_{\parallel}}{\omega v_F} \frac{\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_c^2 - k^2 v_c^2}{\sqrt{v_F^4 k^4 - 4v_A^2 v_S^2 k_{\parallel}^2 k^2}},$$

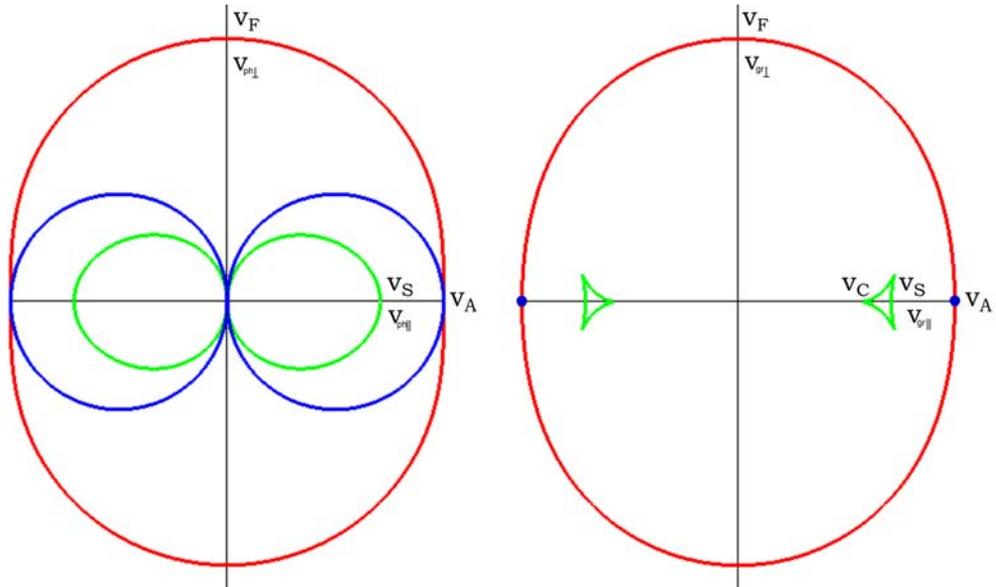


Рисунок 2. Фазовая и групповая полярные диаграммы для МГД-волн (диаграммы Фридрикса). Красным, зеленым и синим цветом обозначены, соответственно, БМЗ, ММЗ и альфвеновская мода. Угол между горизонтальной осью и радиус-вектором данной точки равен углу между направлением магнитного поля

$\vec{B}$  и волнового вектора  $\vec{k}$

$$v_{gr\perp} = \mp \frac{k_{\perp}}{\omega v_F} \frac{\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_c^2}{\sqrt{v_F^4 k^4 - 4v_A^2 v_S^2 k_{\parallel}^2 k^2}}.$$

Здесь обозначено:

$$v_F^2 = v_A^2 + v_S^2,$$

$$v_c^2 = \frac{v_A^2 v_S^2}{v_A^2 + v_S^2}.$$

На рисунке 2 приведены фазовая и групповая полярные диаграммы для МГД-волн (диаграммы Фридрикса).

БМЗ по своей природе аналогичен обычному звуку, только возмущение передается не сжатием и разрежением газа, а сжатием и разрежением силовых линий, в которые заморожена плазма. Роль газового давления играет давление магнитного поля. Как и обычные акустические волны, БМЗ распространяется практически изотропно. Дисперсионное уравнение БМЗ (в пределе  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ , наиболее интересном

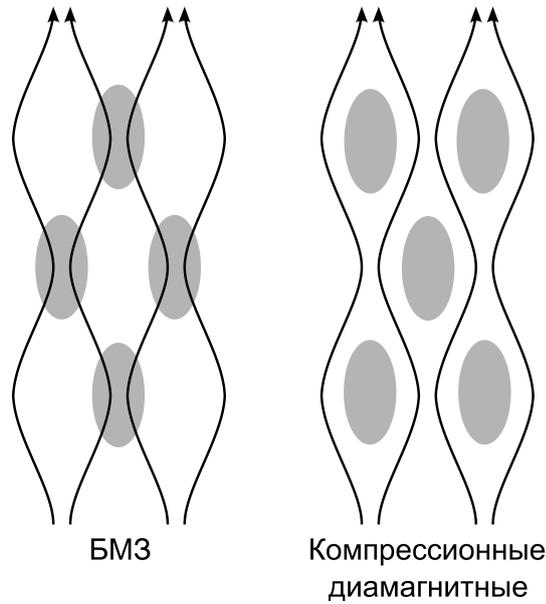


Рисунок 3. Схема колебаний силовых линий и плазмы в БМЗ и диамагнитных компрессионных модах

с точки зрения теории космической плазмы) имеет вид

$$\omega^2 = (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2)v_F^2. \quad (2)$$

Здесь  $k_{\perp}$  — поперечная компонента волнового вектора, перпендикулярная магнитному полю. Эта мода более всего похожа на колебания воздуха внутри барабана. Схема колебаний возмущения магнитного поля  $b$  и тока  $j$  в альфвеновских волнах показано на рис. 1, справа.

Третья МГД-мода называется медленный магнитный звук (ММЗ). Дисперсионное уравнение ММЗ (в пределе  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ ) выглядит очень похоже на дисперсионное уравнение альфвеновских волн,

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_c^2, \quad (3)$$

только вместо альфвеновской скорости  $v_A$  там фигурирует скорость медленного магнитного звука  $v_c$ . Как видно из правой части рис. 2, энергия ММЗ распространяется практически вдоль силовой линии. Продолжая музыкальную аналогию, ММЗ напоминает колебания воздуха внутри труб органа.

БМЗ- и ММЗ-моды являются *компрессионными*, то есть сопровождаются возмущениями не только направления, но и величины магнитного поля. При этом у БМЗ

модуль магнитного поля и плазменное давление осциллируют в фазе, у ММЗ — в противофазе (рис. 3). В последнем случае говорят, что волны обладают свойством диамагнитности.

Если учесть конечное отношение частоты волны и гирочастоты ионов  $\omega_{ci}$ , но не учитывать конечное плазменное давление, то дисперсионное уравнение УНЧ волн принимает вид [Гульельми, 1979]

$$(\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_A^2)(\omega^2 - k^2 v_A^2) - \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} k^2 k_{\parallel}^2 v_A^4 = 0. \quad (4)$$

Большой корень этого уравнения соответствует БМЗ, меньший — альфвеновской моде. Второй из них представляет особый интерес, т.к. при учете конечного отношения  $\omega/\omega_{ci}$  у альфвеновских волн возникает поперечная дисперсия, т. е. зависимость частоты волны от поперечного волнового вектора:

$$\omega^2 \approx k_{\parallel}^2 v_A^2 \left( 1 + \frac{k^2 v_A^2}{\omega_{ci}^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \right). \quad (5)$$

Поперечная дисперсия альфвеновских волн может возникать также при учете конечного ларморовского радиуса ионов и инерции электронов. Наличие поперечной дисперсии альфвеновских волн имеет большое значение для теории неоднородной плазмы, т. к. способно приводить к альфвеновским резонаторам поперек силовых линий (см. ниже).

Наличие высокопроводящей ионосферы приводит к тому, что волна оказывается стоячей вдоль силовой линии. Продольную (т. е. вдоль внешнего магнитного поля) структуру волны характеризует продольное волновое число  $N$ . Так, главной гармонике волны соответствует  $N = 1$ , второй —  $N = 2$ . Электрическое поле главной гармонике имеет пучность на экваторе, второй гармонике — узел. Наоборот, у главной гармонике магнитное поле имеет узел на экваторе, у второй гармонике — пучность (рис. 4).

### Кинетика

В УНЧ-диапазон попадают и некоторые виды волн негидродинамической природы, адекватное описание которых возможно только в кинетике: зеркально-дрейфовые

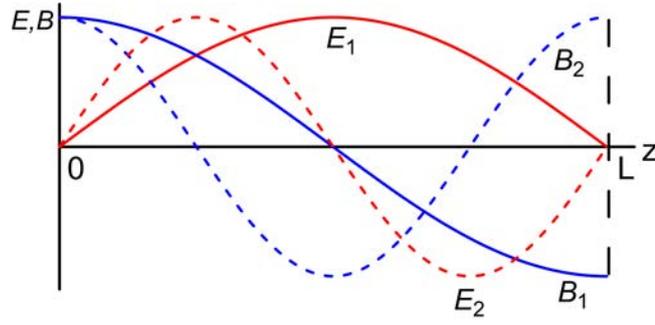


Рисунок 4. Электрическое  $E_N$  и магнитное  $B_N$  поле главной ( $N = 1$ ) и второй ( $N = 2$ ) гармоник стоячей волны в магнитосфере (эскиз)

и дрейфово-компрессионные моды [Chen and Hasegawa, 1991]. Обычно эти моды рассматриваются в пределе поперечной мелкомасштабности ( $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ ). В магнитосфере это соответствует волнам с большими значениями азимутального волнового числа ( $m \gg 1$ ).

Чтобы разобраться в природе этих мод, рассмотрим плазму с бимаксвелловской функцией распределения:

$$F = \frac{n}{(2\pi)^{3/2} V_{\perp}^2 V_{\parallel}} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2}{2V_{\parallel}^2} - \frac{v_{\perp}^2}{2V_{\perp}^2}\right),$$

где  $n$  — концентрация частиц,  $V_{\parallel}$  и  $V_{\perp}$  — средние тепловые скорости частиц вдоль и поперек магнитного поля, соответственно. Для простоты будем рассматривать продольно-однородное поле, но с кривизной силовых линий, давлением электронной компоненты будем пренебрегать. Тогда дисперсионное уравнение поперечно-мелкомасштабных компрессионных УНЧ-возмущений ( $\delta B \neq 0$ ,  $\omega \ll \omega_c$ ) примет вид

$$L_M = 1 + a_M = 0 \quad (6)$$

где обозначено:

$$a_M = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \frac{2\pi}{k_{\perp}^2} \sum_{e,i} \frac{q^2}{m} \int dv_{\parallel} dv_{\perp} v_{\perp}^3 J_1^2(\xi) \hat{Q}F,$$

$\varepsilon = v^2/2$  — энергия частицы в расчете на единицу массы,  $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_c$  — аргумент функции Бесселя  $J_1$ ,

$$\hat{Q}F = -\frac{1}{\omega - \omega_d - k_{\parallel} v_{\parallel}} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{k_y F'}{\omega \omega_c} \right);$$

$$\omega_d = \frac{k_y}{\omega_c} \left( \frac{B'_0}{2B} v_\perp^2 - \frac{v_\parallel^2}{R} \right)$$

есть дрейфовая скорость в неоднородном магнитном поле. Штрихом обозначена производная поперек магнитных оболочек. Отметим, что оператор  $\hat{Q}F$  содержит резонансный знаменатель, соответствующий резонансу волна-частица.

Далее рассмотрим два предельных случая. В *первом случае* (“зеркальный предел”) частота волн принимается предельно низкой:  $\omega, \omega_d \ll k_\parallel v_\parallel$ . В этом случае резонансный знаменатель принимает вид

$$\frac{1}{\omega - \omega_d - k_\parallel v_\parallel} \approx -\frac{i\pi}{k_\parallel} \delta(v_\parallel).$$

Оператор  $L_M$  переписывается в виде

$$L_M = \tau - i \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= 1 + \beta_\perp \left( 1 - \frac{\beta_\perp}{\beta_\parallel} \right), \\ \omega_M &= \frac{k_y V_\parallel^2}{\omega_c} \left[ \frac{n'}{n} + 3 \frac{T_\parallel - T_\perp}{T_\parallel} \frac{B'}{B} \right], \\ \Gamma &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_\parallel}{T_\perp} \frac{k_\parallel V_\parallel}{\beta_\perp}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $k_y$  — проекция волнового вектора на направление бинормали к силовым линиям,  $\beta_\perp$  и  $\beta_\parallel$  — отношение поперечного и продольного плазменного давления к магнитному давлению. Отсюда следует, что частота волны определяется выражением

$$\omega = \omega_M - i\tau\Gamma.$$

В однородной плазме  $\omega_* = 0$  и частота волны является чисто мнимой, то есть имеет место бесстолкновительное затухание волны при  $\tau > 0$  и рост при  $\tau < 0$ . В последнем случае имеет зеркальную неустойчивость, физический механизм которой рассмотрен в работе [Southwood and Kivelson, 1993]. Выпишем условие зеркальной неустойчивости в явном виде:

$$\frac{\beta_\perp}{\beta_\parallel} > 1 + \frac{1}{\beta_\perp}. \quad (9)$$

Как следует из этой формулы, для развития зеркальной неустойчивости необходимо, чтобы поперечное давление значительно превосходило продольное. Порог неустойчивости увеличивается с уменьшением плазменного давления. В неоднородной плазме у волны появляется действительная компонента частоты, равная  $\omega_* \neq 0$ . В этом случае неустойчивость (и соответствующую моду колебаний) называют зеркально-дрейфовой [Hasegawa, 1969]. Отметим, что корректное выражение для действительной части частоты зеркально-дрейфовой было впервые получено в работе [Похотелов и Пилипенко, 1976]. Возможность существования зеркальной моды (в однородной плазме) была обнаружена еще в конце 50-х годов прошлого века [Рудаков и Сагдеев, 1958; Chandrasekhar et al., 1958].

Во *втором случае* мы будем пренебрегать анизотропией давления и рассматривать моды с частотой  $\omega \gg \omega_d$ . Тогда мнимая часть оператора  $L_M$  экспоненциально мала, и он может быть записан в виде

$$L_M = 1 + \beta \frac{\omega - \omega_*}{\omega}, \quad (10)$$

где

$$\omega_* = \frac{k_y n'}{\omega_c n} T \left( 1 - \frac{3T' n}{2n' T} \right).$$

Здесь  $T$  — температура плазмы. Мода, определяемая дисперсионным уравнением  $L_M = 0$  при выполнении равенства (10) называется дрейфово-компрессионной. Частота этой моды определяется выражением

$$\omega = \frac{\omega_* \beta}{1 + \beta}.$$

Эта мода впервые была введена в работе [Rosenbluth, 1981]. Влияние неоднородности вдоль силовой линии на эту моды рассматривалось в работах [Каладзе и др., 1976; Crabtree and Chen, 2004; Crabtree et al., 2003].

Общим свойством зеркально-дрейфовых и дрейфово-компрессионных волн является диамагнитность. Это следует из обобщенного уравнения поперечного баланса сил:

$$\delta P_{\perp} + \frac{B \delta B_{\parallel}}{4\pi} = \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \left[ \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_A^2} - 1 - \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right] \frac{B \delta B_{\parallel}}{4\pi}. \quad (11)$$

Здесь  $\delta P_{\perp}$  и  $\delta B_{\parallel}$  — возмущение плазменного давления, и продольной компоненты магнитного поля, соответственно. Уравнение (11) возникает в результате интегрирования уравнения Власова [Pokhotelov et al., 2000]. В поперечно-мелкомасштабном пределе  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$  отсюда следует равенство нулю полного давления (суммы плазменного и магнитного давления):

$$\delta P_{\perp} + \frac{B\delta B_{\parallel}}{4\pi} \simeq 0.$$

Как видно из этой формулы, плазменное давление  $\delta P_{\perp}$  и продольная компонента магнитного поля  $\delta B_{\parallel}$  волны должны колебаться в противофазе (см. рис. 3). Как мы уже говорили, тем же свойством обладает и медленный магнитный звук.

Следует отметить, что в кинетике могут существовать УНЧ-моды еще одного типа: моды Кадомцева-Погуце [Кадомцев и Погуце, 1966]. Эти моды являются возмущениями электростатического потенциала и, стало быть, продольного электрического поля. Теория этих мод в применении к физике магнитосферы рассматривалась в статьях [Liu, 1970; Hagege et al., 1973; Потапов и Похотелов, 1976]. В данной работе эти моды не рассматриваются. Мы предполагаем, что в плазме имеется примесь холодных электронов ионосферного происхождения, которые приводят к обнулению продольного электрического поля и по этой причине препятствуют образованию в магнитосфере электростатических мод.

### **УНЧ-волны в наблюдательных данных**

С наблюдательной точки зрения, УНЧ-волны делятся на два основных класса: непрерывные пульсации Pc (pulsations continious) и иррегулярные пульсации Pi (pulsations irregulares) [Jacobs et al., 1964]. Каждый из этих классов подразделяется на несколько подклассов, в соответствии с их частотой:

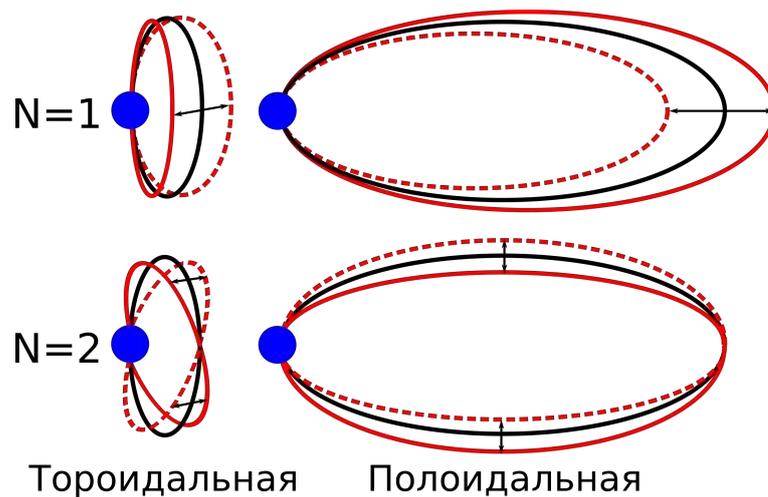


Рисунок 5. Колебания силовых линий в тороидальных и полоидальных альфвеновских волнах

	Непрерывные		Иррегулярные	
	Обозначение	Периоды, с	Обозначение	Периоды, с
Короткопериодные:	Pc1	0.2–5.0	Pi1	1–40
	Pc2	5–10		
Длиннопериодные:	Pc3	10–45	Pi2	40–150
	Pc4	45–150		
	Pc5	150–600		

Колебания типов Pc1–2 и Pi1 обычно относятся к разряду короткопериодных УНЧ-волн, волны типов Pc3–5 и Pi2 — длиннопериодных (иногда в отдельную группу (Pi3 или Ps6) выделяют также иррегулярные пульсации с периодами более 150 секунд [Золотухина и Харченко, 1995]). В данной работе будут рассматриваться, главным образом, волны типов Pc4–Pc5 и отчасти Pi2.

Будучи сугубо морфологической, эта классификация не может адекватно отражать основные физические закономерности УНЧ-волн. Между тем, критический параметр, определяющий физику этих волн, был выявлен еще в конце 60-х годов: это азимутальное волновое число  $m$ , показывающее количество волн, укладывающихся в азимутальном направлении. Альфвеновские волны с малы-

ми и большими азимутальными волновыми числами (иначе говоря, азимутально-крупномасштабные и азимутально-мелкомасштабные волны) различаются, прежде всего, поляризацией (рис. 5). Волны с  $m \sim 1$  могут иметь только тороидальную поляризацию; в этом случае силовые линии геомагнитного поля колеблются преимущественно в азимутальном направлении. Волны с  $m \gg 1$  могут иметь и тороидальную, и полоидальную поляризацию; в последнем случае силовые линии совершают колебания в меридиональной плоскости. Частоты колебаний с разными  $m$  также несколько различаются [Radoski, 1967; Крылов и др., 1981].

Механизмы генерации волн с  $m \sim 1$  и  $m \gg 1$  также, по видимому, различны, хотя осознано это было далеко не сразу. Еще в 1960-х гг. были предложены источники двух типов: внешние и внутренние. Первые из них представляют собой возмущения магнитосферы потоком солнечного ветра: внезапные импульсы динамического давления [Wilson and Sugiura, 1961] или неустойчивость Кельвина-Гельмгольца [Atkinson and Watanabe, 1966]. Под внутренними источниками подразумевают различные плазменные неустойчивости, в ходе развития которых происходит передача волнам энергии дрейфующих в магнитосфере энергичных частиц [Southwood et al., 1969; Hasegawa, 1969; Михайловский и Похотелов, 1975], либо переменные токи в магнитосфере или ионосфере [Золотухина, 1974; Leonovich and Mazur, 1993]. Но лишь в начале 1990-х годов выяснилось, что источники этих двух типов отвечают за генерацию волн с различными значениями азимутального волнового числа: волны с  $m \sim 1$  возбуждаются внешними источниками, с  $m \gg 1$  — внутренними [Chen and Hasegawa, 1991; Leonovich and Mazur, 1993].

Таким образом, современные теоретические представления показывают, что азимутальное волновое число  $m$  является критическим параметром, определяющим физику УНЧ-волн (во всяком случае, это относится к долгопериодическим волнам). В пользу такого заключения говорят и наблюдательные данные. По спутниковым данным, различается распределение этих волн в пространстве [Anderson et al., 1990; Агапитов и Черемных, 2011]. Волны с  $m \sim 1$  наблюдаются обычно в дневные и утренние часы, в то время как волны с  $m \gg 1$  — в ночном и вечернем

секторе магнитосферы. Как показывают радарные эксперименты, различается и направление их фазовой скорости: если у волн с  $m \sim 1$  азимутальная компонента фазовой скорости обычно направлена от Солнца, а радиальная — в сторону полюса, то у волн с  $m \gg 1$  азимутальная компонента фазовой скорости, как правило, имеет западное направление, а радиальная компонента — экваториальное [Yeoman et al., 1992] (это создает определенные трудности для теории этих волн, см. раздел 1).

В работе [Anderson, 1993] предлагается следующая классификация долгопериодических УНЧ-волн, основанная как на спутниковых данных, так и на теоретических соображениях о механизмах генерации волн:

- Тороидальные волны Pc5,  $m \sim 1$  (главная гармоника стоячей волны между магнитосопряженными точками ионосферы);
- Тороидальные волны Pc3–4,  $m \sim 1$  (соответственно, высокие гармоники стоячей волны);
- Полоидальные волны Pc4,  $m \gg 1$ ;
- Компрессионные волны Pc5,  $m \sim 1$  (волны с большой продольной компонентой магнитного поля, как правило, диамагнитные);
- Некогерентный шум.

Разновидностью полоидальных волн Pc4 являются гигантские пульсации P<sub>g</sub> [Клейменова и др., 1990; Takahashi et al., 2011]; это единственная разновидность азимутально-мелкомасштабных волн ( $m$  от 20 до 30), которая может наблюдаться на земной поверхности: волны с еще большими значениями  $m$  поглощаются атмосферой [Hughes and Southwood, 1976; Leonovich and Mazur, 1996]. В наземных наблюдениях компрессионные волны Pc5 могут проявляться в виде пульсаций типа Ps6 [Vaivads et al., 2001].

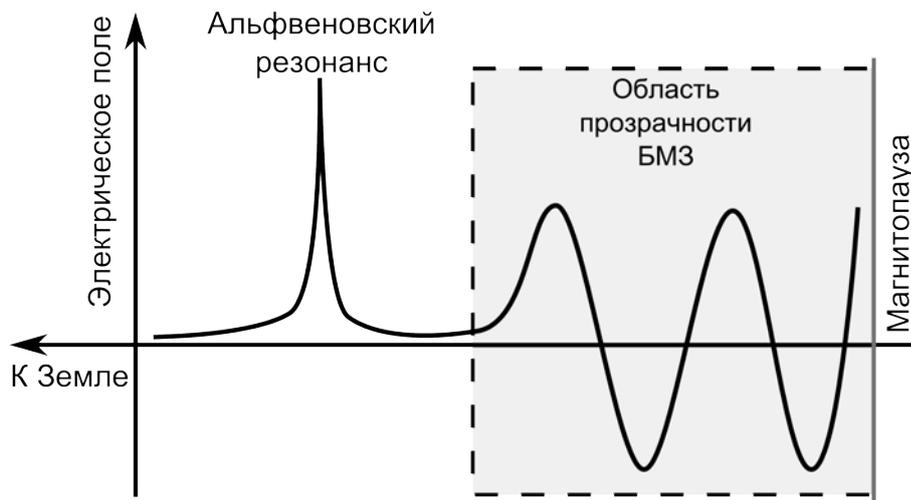


Рисунок 6. Схема альфвеновского резонанса

### Сцепление ветвей УНЧ-колебаний в неоднородной плазме

В однородной плазме три ветви УНЧ-колебаний — альфвеновская мода, БМЗ и ММЗ — распространяются независимо друг от друга. Однако магнитосфера существенно неоднородна: параметры плазмы и магнитного поля меняются и вдоль силовых линий, поперек магнитных оболочек, в азимутальном направлении. В неоднородной плазме три МГД-моды взаимосвязаны (сцеплены) и возможна передача энергии от одних мод другим [Alperovich and Fedorov, 2007; Леонович и Мазур, 2016].

В холодной плазме имеются только две ветви УНЧ-волн — альфвеновская мода, которая распространяется только вдоль силовых линий, и быстрая магнитозвуковая, которая распространяется изотропно. Сцепление этих мод приводит к явлению альфвеновского резонанса. Общая картина этого явления такова (рис. 6). Быстрый магнитный звук распространяется внутрь магнитосферы со стороны ее внешней границы (магнитопаузы). Доходя до некоторой предельной магнитной оболочки, он отражается; суперпозиция падающей и отражённой волн формирует стоячую БМЗ-волну (глобальный МГД-резонатор). Часть энергии БМЗ просачивается внутрь магнитосферы и доходит до резонансной поверхности, определяемой как магнитная оболочка, где частота колебаний равна собственной частоте альфвеновской вол-

ны. Вблизи резонансной поверхности возбуждается тороидально-поляризованная альфвеновская волна. Источником БМЗ считаются процессы в солнечном ветре [Agapitov and Cheremnykh, 2013]. Первоначально явление альфвеновского резонанса было установлено для 1-мерно неоднородной плазмы [Tamao, 1965; Chen and Hasegawa, 1974; Radoski, 1974; Southwood, 1974]. Впоследствии было доказано, что оно должно иметь место также и для 2-мерно неоднородной плазмы с кривыми силовыми линиями [Лифшиц и Федоров, 1986; Леонович и Мазур, 1989; Федоров и др., 1995; Chen and Cowley, 1989; Mond et al., 1990; Wright, 1992b].

Формально, амплитуда альфвеновской волны на резонансной поверхности бесконечна. Особенность волнового поля регуляризируется посредством учета конечной проводимости ионосферы [Hughes and Southwood, 1976] или кинетических эффектов, приводящих к трансформации крупномасштабной альфвеновской волны в мелкомасштабную кинетическую альфвеновскую волну [Hasegawa and Chen, 1975; Леонович и Мазур, 1987].

Как показали Гульельми и Потапов [1984], важнейшей характеристикой альфвеновской волны с точки зрения возможности ее резонансного возбуждения является азимутальное волновое число  $m$ . Резонансное возбуждение альфвеновской волны отсутствует при  $m = 0$ , наиболее эффективно при  $m \sim 1$  и крайне неэффективно при  $m \gg 1$ . Если амплитуду волны на магнитопаузе принять равной за единицу, то в районе резонанса амплитуда будет по порядку величины  $e^{-m}$ . Таким образом, при  $m \gg 1$  амплитуда будет экспоненциально малой. Позднее этот вывод был проверен в ряде работ с использованием численного моделирования [Allan et al., 1986; Inhester, 1987]. Это является главной из причин, почему если волны с  $m \sim 1$  могут генерироваться внешними источниками, то волны с  $m \gg 1$  — только внутренними.

Для азимутально-мелкомасштабных волн ( $m \gg 1$ ) в плазме конечного давления большую роль играет сцепление альфвеновских мод с ММЗ. Механизм этого сцепления в конечном итоге связан с тем, что при наличии кривизны силовых линий альфвеновские волны способны сжимать плазму [Southwood and Saunders, 1985; Ohtani et al., 1989]. Как известно, в однородном магнитном поле альфвеновские

волны не меняют плотность плазмы. Действительно, поперечное электрическое поле альфвеновской волны потенциально, то есть выражается в виде двумерного градиента:

$$\vec{E} = -\nabla_{\perp} \Phi. \quad (12)$$

С другой стороны, электрическое поле связано со скоростью плазмы условием вмороженности

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что движение плазмы является несжимаемым,  $\nabla_{\perp} \cdot \vec{v} = 0$ . Однако это относится только к магнитному полю с прямыми силовыми линиями. При наличии кривизны электрическое поле, удовлетворяющее условию (12), приводит к сжатию плазмы, выражающемуся в отличной от нуля дивергенции вектора поперечной скорости плазмы:

$$\nabla_{\perp} \cdot \vec{v} \simeq \vec{v} \cdot \vec{\kappa}, \quad (14)$$

где  $\vec{\kappa}$  — локальная кривизна силовой линии [Southwood and Saunders, 1985; Walker, 1987]. Напомним, что в однородной плазме распространение альфвеновской волны не приводит к сжатию плазмы. Сжатие плазмы, в свою очередь, обуславливает изменение плазменного давления в волне  $\delta P$ . Линеаризованное уравнение движения в проекции на направление магнитного поля имеет вид

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\delta P. \quad (15)$$

Таким образом, в кривом магнитном поле альфвеновская волна неизбежно генерирует движение плазмы вдоль силовых линий, которое является признаком ММЗ. Как было показано в работах [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998b], поперечная структура волнового поля сцепленных альфвеновской и ММЗ мод выглядит следующим образом: имеются две области локализации волны (области прозрачности), каждая из которых ограничена резонансной поверхностью и поверхностью отражения. Подробного изучения поперечной структуры сцепленных альфвеновской и ММЗ мод до сих пор не производилось.

Другим важным следствием сцепления альфвеновской и ММЗ-мод в кривом магнитном поле являются гидродинамические неустойчивости: баллонная [Агапитов и др., 2006; Golovchanskaya and Kullen, 2005; Parnowski, 2007; Мазур и др., 2012; Leonovich and Kozlov, 2013] и перестановочная (желобковая) неустойчивости [Волков и Мальцев, 1986; Sonnerup and Laird, 1963; Mingalev et al., 2006]. Предполагается, что эти неустойчивости могут играть роль триггера магнитосферных суббурь [Головчанская и др., 2004; Liu et al., 2012; Rae and Watt, 2016; Nishimura et al., 2016] и быть одной из причин появления быстрых плазменных потоков в геомагнитном хвосте (*bursty bulk flows*) [Toffoletto et al., 2020]. В дальнем хвосте магнитосферы может развиваться родственная неустойчивость, называемая двойной градиентной неустойчивостью [Erkaev et al., 2007; Korovinskiy et al., 2019], которая может приводит к появлению специфических «хлопающих» волновых движений плазмы хвоста (*flapping motions*) [Erkaev et al., 2009].

При некоторых условиях возможны и УНЧ-резонансы, связанные со сцеплением БМЗ и ММЗ [Leonovich et al., 2006].

Сцепление различных УНЧ мод изучается также в рамках кинетики. Как мы уже говорили, в кинетическом режиме в неоднородной плазме могут существовать компрессионные моды, которым нет аналога в МГД. Самой известной (хотя и не самой типичной) из них является зеркально-дрейфовая мода, с которой связана одноименная неустойчивость. Как было показано в статье [Lin and Parks, 1978], эта мода сцеплена с альфвеновской, что приводит к значительной модификации критерия неустойчивости. Хотя сцепление кинетических компрессионных мод с альфвеновской изучалось во многих работах [Patel et al., 1984; Pokhotelov et al., 1985; Woch et al., 1988], в настоящее время еще не имеется полного понимания, какое влияние оно оказывает на УНЧ-волны в магнитосфере.

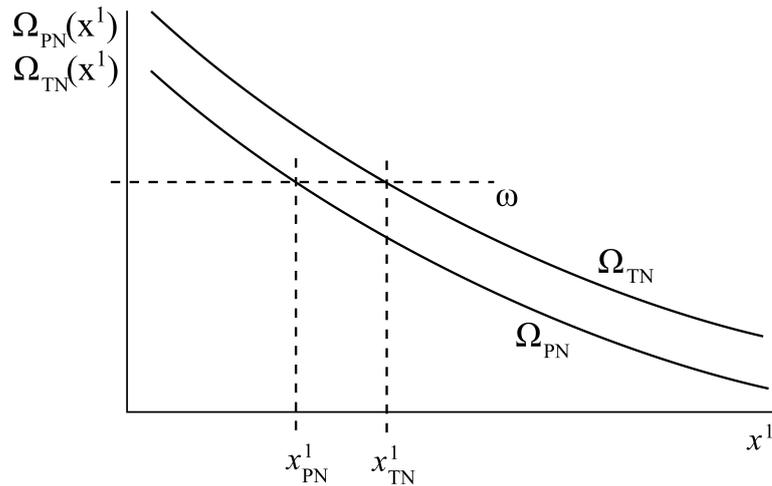


Рисунок 7. Тороидальная  $x^1_{TN}$  и полоидальная  $x^1_{PN}$  поверхности

### Трансформация полоидальных в азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн в тороидальные

Как впервые было показано в работе [Radoski, 1967], альфвеновская волна в пределе  $m \rightarrow \infty$  может иметь полоидальную поляризацию. Однако отсюда не следует, что азимутально-мелкомасштабные волны могут иметь только полоидальную поляризацию. Действительно, особенность волнового поля на резонансной оболочке имеет место при любых  $m$ . При этом азимутальная компонента магнитного поля имеет особенность типа полюса, а радиальная компонента — особенность типа логарифма, т.е. азимутальная компонента магнитного поля намного превышает радиальную, что как раз и означает тороидальную поляризацию. Таким образом, волны с  $m \sim 1$  могут иметь и полоидальную, и тороидальную поляризацию.

В дипольно-подобной магнитосфере частоты тороидальных  $\Omega_{TN}$  и полоидальных  $\Omega_{PN}$  колебаний (здесь  $N$  — продольное волновое число) различаются: тороидальная частота немного больше полоидальной [Radoski, 1967; Крылов и др., 1981]. Это явление часто называется поляризационным расщеплением спектра [Гульельми, 1970а]. В дальнейшем было показано, что влияние конечного давления плазмы (при учете кривизны силовых линий) приводит к усилению поляризационного расщепления, причем оно может сменить знак: полоидальная частота может оказаться выше тороидальной [Климушкин, 1997; Klimushkin et al., 2004].

Тороидальные и полоидальные частоты зависят от радиальной координаты  $x^1$  (роль которой может играть параметр Мак-Илвейна  $L$ ). Магнитные поверхности, на которых выполняются равенства  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$  и  $\omega = \Omega_{PN}(x^1)$ , называются, соответственно тороидальной  $x_{TN}^1$  и полоидальной  $x_{PN}^1$  поверхностями. Обе координаты  $x_{TN}^1$  и  $x_{PN}^1$  являются функциями частоты волны  $\omega$ . Если альфвеновская скорость убывает с расстоянием от Земли (как обстоят дела в большей части магнитосферы) и  $\Omega_{TN} > \Omega_{PN}$ , то тороидальная поверхность отстоит дальше от Земли, чем полоидальная (рис. 7).

Как показали А.С. Леонович и В.А. Мазур, различие между тороидальной и полоидальной частотами приводит к появлению специфической поперечной дисперсии альфвеновских волн (рис. 8, слева) [Leonovich and Mazur, 1990]; это явление не имеет аналога как в однородной плазме, так и в неоднородной плазме с прямыми силовыми линиями, где дисперсия целиком обусловлена кинетическими эффектами [Дмитриенко и др., 1986]. Зависимость частоты волны от поперечных компонент волнового вектора дисперсия приводит к появлению поперечных компонент групповой скорости волны.

Физический смысл тороидальной и полоидальной поверхностей был прояснен в работе [Leonovich and Mazur, 1993], где была изучена структура монохроматических азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн в ВКБ-приближении по радиальной координате. Было показано, что волна возбуждается вблизи полоидальной поверхности и распространяется от Земли, в сторону тороидальной поверхности. При этом радиальная компонента волнового вектора постепенно увеличивается (см. рис. 8, слева). Вблизи тороидальной поверхности энергия волны либо полностью поглощается из-за диссипации в ионосфере, либо волна трансформируется в ультра-мелкомасштабную кинетическую альфвеновскую волну [Leonovich and Mazur, 1995a]. В ходе распространения волны ее поляризация меняется от полоидальной до тороидальной. Траектория волны имеет форму спирали, которая выходит из полоидальной поверхности под прямым углом и входит в тороидальную поверхность по касательной к ней (рис. 8, справа). Поперечная структура волны

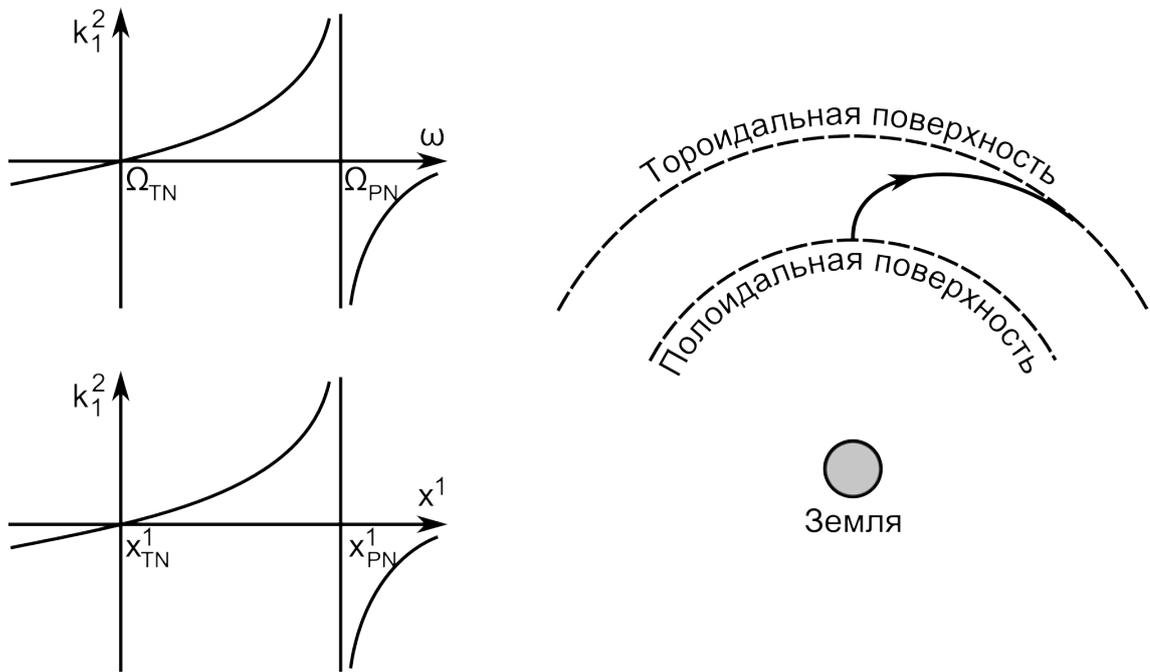


Рисунок 8. Слева: зависимость квадрата радиальной компоненты волнового вектора  $k_1$  от частоты волны и радиальной координаты. Справа: траектория азимутально-мелкомасштабной волны

изображена на рисунке 9. Описанное явление наблюдалось с помощью спутников *Van Allen Probe* [Leonovich et al., 2015]. Другой возможный пример трансформации описан в работе [Takahashi et al., 2018a].

Диаметрально-противоположным случаем по отношению к монохроматическим волнам являются волны, возбужденные импульсным источником: в этом случае в спектре источника присутствуют все частоты. Для таких волн также должно иметь место явление трансформации из полоидальных в тороидальные, но происходящее по совсем другой причине. Если источник волны достаточно широко распределен поперек магнитных оболочек, то возбужденная волна обладает полоидальной поляризацией; однако каждая магнитная оболочка колеблется со своей собственной частотой, и из-за разности частот колебаний на разных оболочках каждая из них вскоре приобретет свою собственную фазу (разбегание по фазам). В результате волновое поле приобретет мелкомасштабную структуру поперек магнитных оболочек (рис. 10). В соответствии с поляризационными свойствами альф-

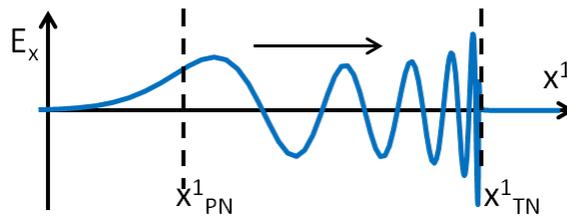


Рисунок 9. Поперечная структура азимутально-мелкомасштабной волны (радиальная компонента электрического поля как функция радиальной координаты). Стрелкой показано направление перемещения энергии

веноской волны это означает, что волна трансформировалась из полоидальной в тороидально-поляризованную. Впервые это явление в физике магнитосферы было изучено в работе [Radoski, 1974], затем в плазме с прямыми силовыми линиями оно разбиралось в статьях [Крылов и др., 1981; Mann and Wright, 1995], и в дипольно-подобном магнитном поле — в работах [Leonovich and Mazur, 1998; Antonova et al., 2000]. Следует отметить, что наблюдения трансформации, связанные с разбеганием по фазам, являются сравнительно редкими [Sarris et al., 2009; Zolotukhina et al., 2008; Wei et al., 2019].

### Резонаторы для УНЧ-волн в магнитосфере

В физике космической плазмы большое значение имеет представление о резонаторах — областях пространства, где волновая энергия замкнута по двум из трех пространственных координат и может распространяться только вдоль третьей. Такие резонаторы являются естественными накопителями волновой энергии в магнитосфере, которая может быть израсходована, например, на ускорение заряженных частиц или нагрев ионосферы. Обычно говорят о поперечных резонаторах, где волна замкнута вдоль силовой линии и поперек магнитных оболочек и распространяется только по азимуту.

Очевидно, необходимым условием для существования такого резонатора является наличие поперечной дисперсии волны, то есть зависимость частоты волны от

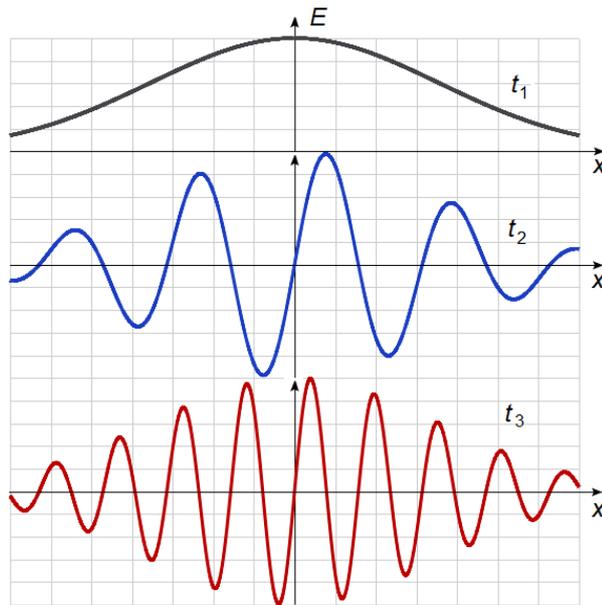


Рисунок 10. Изменение поперечной структуры импульсно-генерированной волны из-за разбегания по фазам ( $t_3 > t_2 > t_1$ )

радиальной компоненты волнового вектора ( $\omega(k_{\perp})$ ) [Гульельми и Потапов, 1985; Дмитриенко и др., 1986]. У БМЗ такая дисперсия имеется уже в однородной плазме. Это видно хотя бы из дисперсионного соотношения (2), которое можно переписать в виде

$$k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel}^2.$$

Отсюда следует, что резонатор для БМЗ может быть локализован в областях с минимумом альфвеновской скорости. Рассматриваются следующие области локализации такого резонатора:

- *Дневная часть магнитосферы вблизи магнитопаузы* [Kivelson and Southwood, 1985]. Этот резонатор может возбуждаться импульсами динамического давления солнечного ветра [Агапитов и Черемных, 2008; Southwood and Kivelson, 1990]. Кроме того, волны могут непосредственно проникать из межпланетного пространства [Walker, 2002; Мазур, 2010]. Далее эти колебания преобразуются в альфвеновские за счет явления альфвеновского резонанса и наблюдаются в виде тороидальных волн типа Pc5.

- *Внешняя часть магнитосферы на флангах хвоста* [Samson et al., 1992b]. В данном случае возбуждение может происходить за счет неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [Mann et al., 1999; Мазур и Чуйко, 2011]. Наблюдательными проявлениями этого резонатора также считаются тороидальные волны Pc5.
- *Область в районе минимума альфвеновской скорости внутри плазмопаузы* [Гульельми, 1970]. Неоднократно высказывалось предположение, что наблюдательными проявлениями этого резонатора являются некоторые пульсации типа Pi2 [Yeoman and Orr, 1989; Sutcliffe and Yumoto, 1989; Takahashi et al., 2018].
- *Область в районе минимума альфвеновской скорости в ближнем плазменном слое* [Леонович и Мазур, 2008]. Предположительное наблюдательное проявление — тороидальные волны Pc5.

У альфвеновской моды дисперсионное соотношение в 1-жидкостной МГД не содержит поперечной дисперсии (1), однако она может возникать благодаря кинетическим эффектам, таким, как конечный ларморовский радиус ионов, инерция электронов или конечная гирочастота ионов, что в конечном итоге делает возможным существование альфвеновских резонаторов [Гульельми и Поляков, 1983; Леонович и др., 1983а; Дмитриенко и др., 1986]. В работе [Polyakov, 2019] приведены убедительные доводы, что некоторые особенности спектров ряда пульсаций Pc1 могут быть обусловлены тем, что эти волны представляют собой собственные моды таких резонаторов. Возможно и существование резонаторов поперек силовых линий и для длиннопериодных альфвеновских волн (Pc4-5) [Vetoulis and Chen, 1994; Leonovich and Mazur, 1995b; Klimushkin, 1998a]. В данном случае поперечная дисперсия обусловлена кривизной силовых линий. Альфвеновские резонаторы, обусловленные кинетическими эффектами и кривизной силовых линий, могут быть локализованы в районе плазмопаузы и кольцевого тока. Также возможно появление резонатора для альфвеновских волн за счет диссипативных эффектов

[Чурилов, 2002], однако в магнитосферном контексте эта возможность не исследовалась.

Важной особенностью альфвеновских волн, замкнутых в поперечный резонатор, является изменения характера их спектра: он становится не непрерывным, как у «обычных» альфвеновских волн, а дискретным. Дискретность возникает из-за того, что в резонатор могут укладываться только целое число полуволн по радиальной координате. Ввиду наличия зависимости  $\omega(k_{\perp})$  отсюда следует, что и частота должна быть дискретной. Важным следствием этого обстоятельства является то, что для резонаторных мод не должно иметь место явление трансформации из полоидальных в тороидальные моды, вызванной разбеганием по фазам. Вместо этого должна возникать амплитудная модуляция, обусловленная сложением нескольких собственных гармоник резонатора [Mager and Klimushkin, 2013]. В связи с этим следует отметить, что наблюдения трансформации полоидальных альфвеновских волн в тороидальные крайне редки. Возможно, это связано с тем, что наблюдаемые полоидальные волны типов Pc4-5 в большинстве случаев являются модами колебаний поперечных альфвеновских резонаторов.

## **Интерпретация различных типов азимутально-мелкомасштабных УНЧ-волн**

### **Полоидальные пульсации Pc4**

При спутниковых наблюдениях в диапазоне Pc4 доминируют полоидальные пульсации с большими значениями азимутального волнового числа ( $m = 20-150$ ). Земная атмосфера не пропускает на поверхность Земли волны с малыми поперечными длинами волн, поэтому азимутально-мелкомасштабные волны не могут наблюдаться с помощью наземных магнитометров, за исключением так называемых гигантских пульсаций (Pg), имеющих не очень большие  $m$ , около 20–30.

Поскольку при  $m \gg 1$  альфвеновский резонанс неэффективен, для объяснения возникновения полоидальных УНЧ-волн привлекаются внутримангнитосфер-

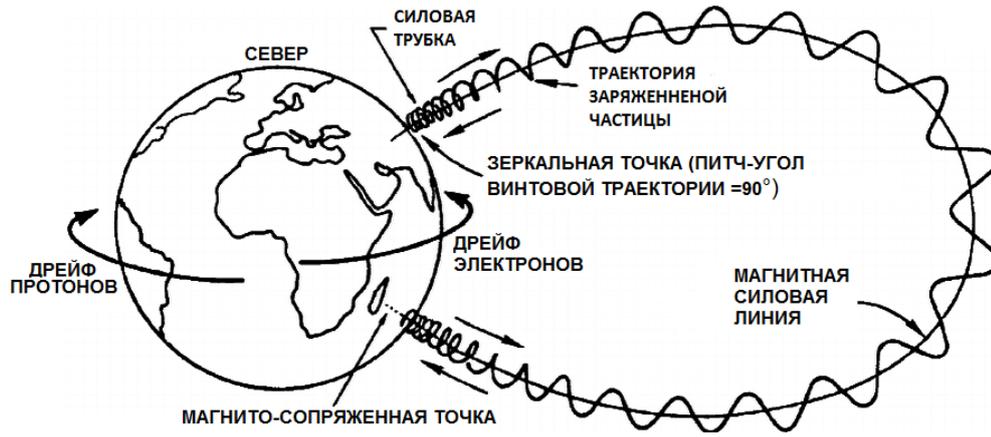


Рисунок 11. Движение заряженных частиц в магнитосфере Земли

ные источники, главным образом — различные кинетические неустойчивости, возникающие при взаимодействии волна-частица.

Заряженные частицы совершают в магнитосфере движения трех родов: лармовское вращение вокруг силовой линии с гирочастотой  $\omega_c$ , дрейфовое движение в азимутальном направлении с частотой  $\omega_d$ , и колебания вдоль силовой линии между зеркальными точками с баунс-частотой  $\omega_b$  (рис. 11). Волны могут обмениваться энергией с частицами посредством поперечного  $E_{\perp}$  и продольного  $E_{\parallel}$  электрического поля и продольного магнитного поля  $B_{\parallel}$  (бетатронный эффект). В дрейфовом приближении темп взаимодействия волна-частица описывается уравнением [Нортроп, 1967]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = q \vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\parallel} + q \vec{u}_d \cdot \vec{E}_{\perp} + \mu \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial t}, \quad (16)$$

где  $\varepsilon = Mv^2/2$  и  $\mu = Mv_{\perp}^2/2B$  — кинетическая энергия и магнитный момент частицы,  $M$  и  $q$  — ее масса и заряд,  $u_d$  — скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле. В случае альфвеновской волны, взаимодействие происходит главным образом за счет поперечного электрического поля  $E_{\perp}$ , поскольку продольное магнитное поле у этой моды практически отсутствует, а продольное электрическое поле у УНЧ-волн мало. Поскольку скорость дрейфа направлена в азимутальном направлении, для эффективного взаимодействия с частицами альфвеновская волна должна иметь значительное азимутальное электрическое поле, т. е. быть полоидально-поляризованной. Эффективное взаимодействие между УНЧ-волной

(с частотой  $\omega \ll \omega_c$ ) и заряженной частицей может происходить при выполнении условия баунс-дрейфового резонанса [Dungey, 1964]

$$\omega - m\omega_d - K\omega_b = 0, \quad (17)$$

где  $m$  — азимутальное волновое число и  $K$  — номер баунс-гармоники (целое число). При  $K = 0$  резонанс называют дрейфовым. Поскольку дрейфовая  $\omega_d$  и баунс  $\omega_b$  частоты зависят от энергии частицы  $\varepsilon$ , условие (17) выполняется при определенной резонансной энергии  $\varepsilon_{res}$ .

Будет ли это взаимодействие приводить к перекачке энергии от альфвеновской волны к частицам (бесстолкновительное затухание волны) или в обратном направлении (неустойчивость), зависит от функции распределения частиц  $F$ . В общем виде выражение для инкремента неустойчивости может быть записано в виде [Southwood, 1980]

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{m}{\omega} \frac{c}{qB_{eq}L} \frac{\partial F}{\partial L} \right]_{\varepsilon_{res}} > 0, \quad (18)$$

где  $B_{eq}$  — значение магнитного поля на экваторе,  $L$  — параметр МакИлвейна. Подробное обсуждение физической природы этого условия содержится в работах [Huba and Drake, 1981, 1982].

Обычно рассматриваются неустойчивости двух типов. *Градиентные неустойчивости* имеют место в случае, когда концентрация или средняя энергия частиц зависят от радиальной координаты: второе слагаемое в левой части в формуле (18) положительно (предполагается, что в точке резонанса производная функции распределения по энергии отрицательна, что имеет место, например, для распределения Максвелла). Этой неустойчивости способствует азимутальная мелкомасштабность колебаний ( $m \gg 1$ ). Генерация альфвеновских волн градиентной неустойчивостью была впервые изучена в работах [Southwood et al., 1969; Southwood, 1976; Karpman et al., 1977; Клименко и Мишин, 1980].

Чаще, однако, привлекают другой вид неустойчивости, когда имеет место монотонная зависимость функции распределения от энергии частицы: в точке резонанса  $\varepsilon_{res}$  производная  $\partial F/\partial \varepsilon$  положительна (рис. 12). Неустойчивость этого типа может быть названа *инверсной*. Впервые она была рассмотрена в работе [Кораблев

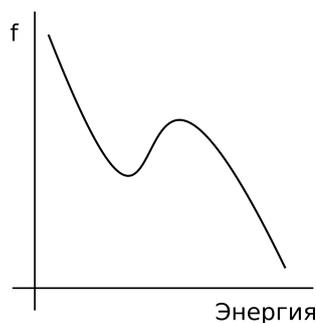


Рисунок 12. Функция распределения с инверсным участком (схематическое изображение)

и Рудаков, 1968]. Частным примером инверсной неустойчивости является низкочастотная пучковая неустойчивость в магнитном поле, которую впервые изучили Ковнер [1961] и Степанов и Киценко [1961]. Инверсное распределение может быть результатом суббуревой инжекции частиц, поскольку более энергичные частицы быстрее достигают данной точки по азимуту, чем менее энергичные частицы, благодаря чему более энергичные частицы добавляются к локальной фоновой плазме в более высоком темпе, чем менее энергичные [Karpman et al., 1977; Glassmeier et al., 1999]. Инверсное распределение может возникать также в стационарных условиях из-за наличия глобального магнитосферного электрического поля, вызывающего не зависящий от энергии дрейф в скрещенных полях [Chisham, 1996; Ozeke and Mann, 2001].

На роль энергичных частиц — источников волн обычно предлагаются протоны кольцевого тока с энергиями 10 – 100 кэВ. Действительно, почти во всех случаях наблюдаемые азимутально-мелкомасштабные волны распространяются на запад, в сторону дрейфа ионов. Статистические исследования показывают, что полоидальные волны обычно наблюдаются в магнитосфере во время начала усиления кольцевого тока [Anderson, 1993; Yeoman et al., 2000]. Ассоциация между полоидальными УНЧ-волнами и инверсными распределениями была статистически подтверждена в цикле работ [Baddeley et al., 2002, 2004, 2005b; Wilson et al., 2006]. В работе [Baddeley et al., 2005a] было показано, что в тех случаях, когда инверсные распределения наблюдались одновременно с полоидальными волнами, они

содержали больше свободной энергии, чем в среднем. Более того, как показали эти авторы, свободная энергия инверсных распределений, доступная для генерации полоидальных волн, совпадала с волновой энергией пульсаций, в конечном итоге поглощенной ионосферой.

В статьях [Allan et al., 1982, 1983] было показано, что во многих случаях азимутальные фазовые скорости  $\omega/m$  полоидальных волн имеют такую же зависимость от радиальной координаты  $L$ , как и дрейфовая скорость протонов. Далее, в работе [Fenrich and Samson, 1997] было установлено, что в ряде случаев во время наблюдения на радаре амплитуда полоидальных волн растет со временем, что было истолковано как свидетельство работы плазменной неустойчивости. Наконец, в статьях [Chisham et al., 1992; Wright et al., 2001] были обнаружены гигантские пульсации, наблюдавшиеся одновременно с тем, как в соответствующий район магнитосферы прибыли облака энергичных протонов, инжектированных во время суббурь.

Современные спутниковые системы (Cluster, Themis, Van Allen Probe, MMS) делают возможным одновременное исследование волн и распределения частиц в магнитосфере. Эти работы показывают, что, действительно, азимутально-мелкомасштабные волны часто наблюдаются одновременно с неустойчивыми распределениями частиц. Приведем краткую сводку этих результатов ( $K$  — баунс-гармоника,  $N$  — продольная гармоника стоячей волны):

- $K = 1, N = 2$ , инверсная неустойчивость: [Hughes et al., 1978, 1979; Wright et al., 2001; Baddeley et al., 2002; Liu et al., 2013; Takahashi et al., 2018b; Wei et al., 2019].
- $K = 0, N = 1$ , инверсная неустойчивость: [Mager et al., 2018].
- $K = 0, N = 1$ , градиентная неустойчивость: [Dai et al., 2013; Takahashi et al., 2018a].

- $K = 1$ ,  $N = 2$ , градиентная неустойчивость: [Min et al., 2017; Oimatsu et al., 2018; Yamamoto et al., 2019; Wei et al., 2019; Rubtsov et al., 2021; Mager, 2021; Mikhailova et al., 2022].

С точки зрения большинства ученых, все это доказывает, что полоидальные пульсации с большими значениями азимутального волнового числа действительно порождаются плазменными неустойчивостями высокоэнергичной компоненты космической плазмы, прежде всего, протонов.

### Компрессионные буревые волны Pc5

Эти волны были впервые выделены в особую категорию в работах [Lanzerotti et al., 1969; Barfield and McPherron, 1972]. Это азимутально-мелкомасштабные волны (обычно азимутальное волновое число  $m > 50$ ), обычно наблюдаемые в период усиленного кольцевого тока, на главной фазе магнитных бурь. Как показывает само название этих волн, магнитное поле у них пульсирует не только по направлению, но и по модулю; это означает наличие продольной компоненты магнитного поля волны  $B_{\parallel}$ . Колебания магнитного поля сопровождаются колебаниями давления плазмы, причем давление плазмы и модуль магнитного поля колеблются в противофазе. Это свойство называют диамагнетизмом: если в какой-то момент магнитное поле возрастает, то плазменное давление, наоборот, убывает. Частоты этих волн ниже альфвеновских на тех же магнитных оболочках.

Компрессионные буревые волны Pc5 не могут быть отождествлены с быстрым магнитным звуком (БМЗ), поскольку БМЗ с  $m \gg 1$  в большей части магнитосферы может лежать только в диапазоне Pc3. Из всех МГД-мод остается только медленный магнитный звук (ММЗ). Характерной особенностью ММЗ является то, что полное давление (сумма плазменного и магнитного давлений) остается неизменным:

$$\delta P + \frac{B B_{\parallel}}{4\pi} = 0 \quad (19)$$

(здесь  $\delta P$  — вариация давления плазмы и  $B$  — равновесное магнитное поле). Идентификация компрессионных волн Pc5 с ММЗ произведена, в частности, в работах

[Zhu and Kivelson, 1991; Klimushkin, 1998b; Leonovich et al., 2006; Du et al., 2011]. Слабым местом этой интерпретации является то, что теория ММЗ в настоящее время развивается исключительно в рамках гидродинамики, и не совсем ясно, в какой мере гидродинамика применима для описания горячей бесстолкновительной плазмы, коей является плазма магнитосферы (хотя применимость МГД для описания холодной бесстолкновительной плазмы сомнений не вызывает). Вероятно, последовательное описание волн в горячей бесстолкновительной плазме возможно только в рамках кинетики.

Между тем, еще Михайловский и Фридман [1966] отметили, что в рамках кинетики в горячей плазме могут существовать компрессионные моды, не имеющие аналога в МГД. Эти моды также отвечают диамагнитному условию (19). Это зеркально-дрейфовая и дрейфово-компрессионная мода, о которых говорилось выше.

Начиная с работы [Lanzerotti et al., 1969] компрессионные буревые волны Pc5 нередко отождествлялись с зеркально-дрейфовыми модами. И действительно, для нескольких случаев было показано, что при наблюдении этих волн в плазме выполнялось условие зеркальной неустойчивости (9) [Rae et al., 2007; Soto-Chavez et al., 2019; Cooper et al., 2021; Korotova and Sibeck, 2024]. Однако теория зеркально-дрейфовой моды еще далека от завершения, и не совсем ясно, в какой мере в нее вписываются наблюдательные данные о компрессионных волнах Pc5. Большое влияние на условия зеркально-дрейфовой неустойчивости оказывает сцепление с альфвеновской модой, возникающее из-за неоднородности давления поперек силовых линий. Однако до сих пор рассматривались только отдельные аспекты этого явления [Lin and Parks, 1978; Pokhotelov et al., 1985; Woch et al., 1988], из-за чего критерий этой неустойчивости до конца еще не ясен. Практически неисследованным остается вопрос о том, какого рода пространственные структуры могут образовывать зеркально-дрейфовые моды.

Другой компрессионной модой, наличествующей в кинетике, но отсутствующей в гидродинамике, является *дрейфовая компрессионная мода*. Для существования

этой моды не нужно никаких особых условий, кроме конечного плазменного давления и неоднородности плазмы. Частота этой моды по порядку величины совпадает с частотой градиентного дрейфа. Компрессионные буревые пульсации Pc5 отождествлялись с дрейфово-компрессионной модой в работах [Crabtree and Chen, 2004; Chelpanov et al., 2016; Костарев и Магер, 2017; Rubtsov et al., 2018; Takahashi et al., 2022; Yamamoto et al., 2024]. Теоретическое исследование дрейфовой компрессионной моды в магнитосферной плазме производилось в работах [Ng et al., 1984; Crabtree et al., 2003; Crabtree and Chen, 2004]. Однако до сих пор теория этой моды развита сравнительно слабо. Так, практически не изучалось влияние сцепления с альфвеновской волной, которое возникает при конечной кривизне силовых линий.

Наконец, компрессионные волны Pc5 могут отождествляться и с альфвеновскими волнами. На первый взгляд, это кажется странным, поскольку у альфвеновских волн нет продольного магнитного поля. Однако это относится только к однородной плазме. В горячей плазме с кривыми силовыми линиями ситуация другая: поскольку колебания плазмы в альфвеновских волнах происходят строго поперек магнитного поля, кривизна силовых линий требует сжатия плазмы; сжатие плазмы означает изменение давления, которое в соответствии с диамагнитным условием (19) приводит к появлению продольной компоненты магнитного поля [Pokhotelov et al., 1985; Southwood and Saunders, 1985; Сафаргалеев и Мальцев, 1986].

Частоты альфвеновских волн в горячей плазме также могут быть ниже, чем в холодной. В 1-жидкостной МГД дисперсионное соотношение полоидальных альфвеновских волн в горячей плазме с кривыми силовыми линиями приобретает вид [Сафаргалеев и Мальцев, 1986; Климушкин, 1997]

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 + \eta, \quad (20)$$

где слагаемое  $\eta$  («баллонный член») имеет вид

$$\eta = \frac{2}{R} \left( \frac{4\pi P'}{B^2} + \frac{2 v_s^2}{R v_A^2} \right).$$

Отсюда следует, что при достаточно резком уменьшения плазменного давления с расстоянием от Земли возможна ситуация, когда  $\eta < 0$  и частота альфвеновской волны ниже, чем в холодной плазме ( $\omega = k_{\parallel} v_A$ ).

### Низкочастотные иррегулярные пульсации Pi2

К категории Pi2 относятся, по существу, любые длиннопериодные УНЧ-волны импульсивного характера. Неудивительно, что существует огромное количество сценариев, каждый из которых, возможно, адекватно описывает те или иные конкретные разновидности (или конкретные случаи) пульсаций Pi2 [Keiling and Takahashi, 2011].

Большой интерес представляет предположение, что некоторые пульсации Pi2 могут быть обязаны своим появлением неустойчивостям магнитосферной плазмы [Solovuev et al., 2000]. На роль такой неустойчивости в статье [Keiling, 2012] предложена баллонно-дрейфовая неустойчивость. Обычно баллонная неустойчивость рассматривается как следствие модификации дисперсионного соотношения для полоидальной альфвеновской моды в плазме конечного давления. В горячей плазме с кривыми силовыми линиями это соотношение приобретает вид (20). При условии уменьшения плазменного давления с расстоянием от Земли частота полоидальной альфвеновской волны ниже, чем в холодной плазме. Если это уменьшение является достаточно резким, то квадрат полоидальной частоты может стать отрицательным ( $\omega^2 < 0$ ), т. е. сама эта частота окажется чисто мнимой. Благодаря этому возникнет решение, экспоненциально растущее со временем — *баллонная неустойчивость*. При учете дрейфовых эффектов 2-жидкостной МГД у альфвеновской частоты появляется и действительная часть [Miura et al., 1989]. В этом случае неустойчивость называется баллонно-дрейфовой.

Однако в действительности, как показали Мазур и др. [2012], баллонная неустойчивость развивается не на альфвеновской, а на ММЗ-ветке колебаний. Более того, колебания горячей бесстолкновительной плазме следует рассматривать не в гидродинамике, а в кинетике. В работе [Andrushchenko et al., 1990] было показа-

но, что резонансное взаимодействие волна-частица приводит к появлению у баллонных мод действительной части частоты. Однако попытки разработки кинетической теории баллонной неустойчивости до сих пор не учитывали сцепление альфвеновской и компрессионной мод [Cheng and Lui, 1998]. В работе [Crabtree et al., 2003] некоторые пульсации  $Pi2$  отождествлялись с дрейфово-компрессионными модами, неустойчивость которых обусловлена резонансным взаимодействием с высокоэнергичными протонами.

## Глава 1

# Пространственная структура и источники азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн в магнитосфере

### 1.1 Равновесие и система координат

Для изучения магнитосферных явлений используется ортогональная криволинейная система координат  $\{x^1, x^2, x^3\}$  (рис. 13), где силовые линии играют роль координатных линий  $x^3$ , линии тока — координатных линий  $x^2$ , и поверхности постоянного давления (магнитные поверхности) являются координатными линиями  $x^1 = const$ . Координаты  $x^1$  и  $x^2$  играют роль радиальной и азимутальной координат, соответственно. Компоненты метрического тензора обозначаются  $g_i$ . Детерминант метрического тензора есть  $g = g_1 g_2 g_3$ .

Давление плазмы  $\hat{P}_0$  считается анизотропным. Поперечные компоненты тензора давления  $P_{0\perp}$ , продольная компонента —  $P_{0\parallel}$ . Равновесное магнитное поле  $B_0$ , давление  $\hat{P}_0$  и ток  $J_0$  связаны условием равновесия

$$\nabla \cdot \hat{P}_0 = (4\pi)^{-1} \vec{J}_0 \times \vec{B}_0. \quad (1.1)$$

Иначе его можно записать в виде

$$\frac{4\pi}{B_0^2} \nabla_{\perp} P_{0\perp} = -\frac{1}{B_0} \nabla_{\perp} B_0 - \frac{\vec{n}}{R} \left( 1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right), \quad (1.2)$$

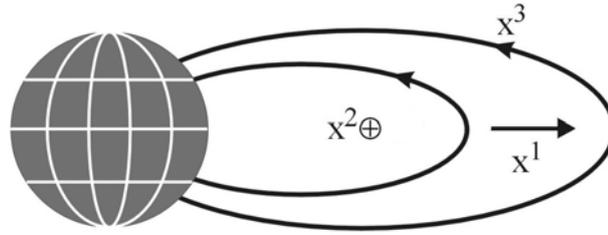


Рисунок 13. Система координат  $\{x^1, x^2, x^3\}$ , привязанная к силовым линиям где  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный по нормали к силовой линии,  $R$  — радиус кривизны силовой линии,  $\beta_{\perp}$  и  $\beta_{\parallel}$  — отношение поперечного и продольного плазменного давления к магнитному. В случае плазмы низкого давления в выбранной системе координат (1.2) сводится к виду

$$\partial_1 \ln B_0 = \frac{\sqrt{g_1}}{R} \quad (1.3)$$

По координате  $x^3$  плазму ограничивает высокопроводящая ионосфера. Координаты ионосферных концов силовых линий есть  $x_{\pm}^3$ .

В аксиально-симметричной модели магнитосферы все возмущенные величины пропорциональны  $\exp(-i\omega t + ik_2 x^2)$ , где  $\omega$  — частота волны и  $k_2$  — азимутальная компонента волнового вектора. Если в качестве координаты  $x^2$  используется азимутальный угол  $\varphi$ , то  $k_2 = m$ , где  $m$  — азимутальное волновое число.

Экспериментальному исследованию распределения равновесных параметров в магнитосферы посвящен ряд работ, использующих данные искусственных спутников Земли [Кирпичев и Антонова, 2011; Lui et al., 1987; Lui and Hamilton, 1992; De Michelis et al., 1997; Antonova et al., 2013, 2014, 2018].

## 1.2 Пространственно-временная структура и поляризация альфвеновских волн, возбужденных кинетическими неустойчивостями

Как уже отмечалось в Введении, основным кандидатом на роль источника азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн (т.е. волн с  $m \gg 1$ ) в магнитосфере считаются кинетические неустойчивости, связанные с взаимодействием волна-частица. Действительно, такие волны имеют полоидальную поляризацию,

то есть в их магнитном поле доминирует радиальная компонента, в электрическом — азимутальная. Но обмен энергией между частицами и волнами с частотами много меньшими гирочастоты протонов описывается уравнением Нортропа

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = q \vec{u}_d \cdot \vec{E}_\perp, \quad (1.4)$$

где мы пренебрегли продольным электрическим и магнитным полем волны. В этой формуле  $\vec{u}_d$  — скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле, направленная по азимуту. Следовательно, для эффективного обмена энергией между волной и частицей волна должна иметь значительное азимутальное электрическое поле, что как раз и характерно для полоидальных волн с  $m \gg 1$ . Вывод о том, что полоидальные альфвеновские волны генерируются кинетическими неустойчивостями, подтверждается также спутниковыми наблюдениями, о которых говорилось во Введении. Напомним, что альфвеновские волны могут генерироваться неустойчивостями двух типов: инверсными неустойчивостями, когда производная функции распределения по энергии при резонансной энергии  $\varepsilon_{res}$  положительна,  $\partial F / \partial \varepsilon > 0$ ; и градиентными неустойчивостями, когда при резонансной энергии  $\varepsilon_{res}$  выполняется неравенство  $(m/q)(\partial F / \partial L) > 0$ . Общий критерий неустойчивости дается выражением (18) из Введения.

В данном разделе мы проанализируем пространственную структуру альфвеновских волн, генерированных энергичными частицами.

### 1.2.1 Монохроматические волны.

**Исходные уравнения.** Линеаризованное уравнение магнитной гидродинамики, описывающее волну с частотой  $\omega$ , имеет вид [Кадомцев, 1963]

$$-\rho_0 \omega^2 \vec{\xi} + \nabla \cdot \hat{P}' = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \vec{B}_0 \times \text{rot} [\vec{\xi} \times \vec{B}_0] - \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \times \text{rot rot} [\vec{\xi} \times \vec{B}_0], \quad (1.5)$$

где  $\vec{\xi}$  — смещение плазмы,  $B_0$  — невозмущенное магнитное поле,  $\rho_0$  и  $P_0$  — соответственно, равновесные плотность и давление плазмы,  $P'$  — возмущение давления. Мы предполагаем магнитосферу идеально проводящей. Тогда электрическое поле волны направлено перпендикулярно силовым линиям ( $\vec{E} = \vec{E}_\perp$ ). Согласно теореме

Гельмгольца, вектор электрического поля можно выразить в виде суммы потенциальной и вихревой компонент, каждая из которых выражается через некоторую скалярную функцию:

$$\vec{E} = -\nabla_{\perp}\Phi + \nabla_{\perp} \times \vec{e}_{\parallel}\Psi. \quad (1.6)$$

Здесь  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{B}/B$ ,  $\nabla_{\perp}$  — двухмерный оператор набла в плоскости  $(x^1, x^2)$ . В однородной плазме потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$  относятся к альфвеновской волне и магнитному звуку, соответственно [Климушкин, 1994]. Скалярную функцию  $\Phi$  часто называют потенциалом.

В дальнейшем будем рассматривать волны с большими значениями азимутального волнового числа  $k_2 (\equiv m)$  и частотами в диапазоне Rc4-5. В этом случае ролью быстрого магнитного звука (БМЗ) можно пренебречь, поскольку для БМЗ с такими параметрами магнитосфера непрозрачна [Леонович и Мазур, 2016]. В плазме конечного давления кривизна силовых линий приводит к сцеплению альфвеновских волн с медленным магнитным звуком (ММЗ). Однако сцепление с ММЗ само по себе не оказывает существенного влияния на распространение альфвеновских волн, поскольку характерные частоты ММЗ значительно ниже, чем у альфвеновской моды [Агапитов и др., 2006]. Таким образом, УНЧ-волна оказывается представленной только альфвеновской модой, электрическое поле которой можно выразить в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} = -\nabla_{\perp}\Phi. \quad (1.7)$$

В работе предполагается, что тензор давления состоит из двух слагаемых, соответствующих плотной и относительно холодной (индекс "c") и разреженной, но горячей (индекс "h") компонентам плазмы:

$$\hat{P} = \hat{P}_c + \hat{P}_h.$$

Тензор  $\hat{P}_c$  будем находить в рамках теории двух адиабатических инвариантов, где выполняются соотношения

$$\frac{d P_{\perp}}{dt \rho B} = 0, \quad \frac{d P_{\parallel} B^2}{dt \rho^3} = 0,$$

линеаризация которых при  $\beta \ll 1$  и  $m \gg 1$  дает

$$P'_{c\perp,\parallel} = -\frac{ck_2}{\omega B_0} \frac{g}{\sqrt{g_2}} \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{g_1}} \partial_1 P_{c0\perp,\parallel} + \frac{2\gamma_{\perp,\parallel} P_{c0\perp,\parallel}}{R} \right). \quad (1.8)$$

Здесь обозначено:  $c$  – скорость света,  $\gamma_{\parallel} = 2$  и  $\gamma_{\perp} = 3/2$  – показатели адиабаты при движении вещества вдоль и поперек силовых линий,  $g_i$  – диагональные компоненты метрического тензора,  $g = g_1 g_2 g_3$ ,  $R$  – радиус кривизны силовой линии. При выводе (1.8) использовано также условие вмороженности магнитного поля в плазму

$$\vec{\xi}_{\perp} = \frac{ic}{\omega} \frac{\vec{E} \times \vec{B}_0}{B_0^2}$$

и условие равновесия плазмы с  $\beta \ll 1$  (1.3).

Компоненты тензора  $\hat{P}'_h$  выражаются через возмущенную функцию распределения частиц примеси  $f'_h$ . Сумма продольной и поперечной компонент этого тензора есть

$$P'_{h\parallel} + P'_{h\perp} = \sum_{j,\sigma} 2\pi M_j \int_0^{\infty} d\varepsilon \int_0^{\varepsilon/B_0} d\mu f'_h \frac{B_0}{|v_{\parallel}|} (v_{\parallel}^2 + \mu B_0), \quad (1.9)$$

где  $\varepsilon = v^2/2$  – энергия частицы,  $\mu = v_{\perp}^2/2B_0$  – магнитный момент частицы,  $j$  принимает значения  $j = i, e$  для ионов и электронов,  $M$  – масса частицы,

В дальнейшем будем предполагать, что структура моды определяется в основном холодной компонентой плазмы, а ее устойчивость – горячей компонентой, т. е. выполняются неравенства

$$\text{Re}P'_c \gg \text{Re}P'_h, \quad \text{Im}P'_c \ll \text{Im}P'_h.$$

Тогда уравнение (1.5) можно записать в виде

$$\partial_1 \hat{L}_T(\omega) \partial_1 \Phi - k_2^2 \hat{L}_P(\omega) \Phi - \frac{k_2 \omega}{c} \frac{\sqrt{g}}{B_0 R} \frac{4\pi i}{\sqrt{g_2}} \text{Im}(P'_{h\parallel} + P'_{h\perp}) = 0, \quad (1.10)$$

где

$$\hat{L}_T(\omega) = \partial_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \left( 1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right) \partial_3 + \frac{\sqrt{g} \omega^2}{g_1 v_A^2}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{L}_P(\omega) = & \partial_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \left( 1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right) \partial_3 + \frac{\sqrt{g} \omega^2}{g_2 v_A^2} \\ & - \frac{\sqrt{g}}{g_2} \frac{4\pi}{RB_0^2} \left[ \frac{\partial_1(P_{0\parallel} + P_{0\perp})}{\sqrt{g_1}} + \frac{2(\gamma_{\perp} P_{\perp} + \gamma_{\parallel} P_{\parallel})}{R} \right] \end{aligned}$$

– операторы, определяющие продольную структуру тороидальной и полоидальной мод в анизотропной плазме конечного, но низкого давления (обратим внимание, что в этих уравнениях мы опустили индекс 'с'). Как обычно, альфвеновская скорость обозначена  $v_A$ .

Вдоль силовой линии магнитосфера ограничена плотной высокопроводящей ионосферой. На границе между магнитосферой и ионосферой из-за разрыва плотности электрическое поле волны терпит разрыв. Как показано в работе [Leonovich and Mazur, 1993], граничные условия на ионосфере записываются в виде

$$\Phi_N|_{x_{\pm}^3} = \mp \left( ia \frac{\partial \Phi_N}{\partial l} \right)_{x_{\pm}^3}, \quad a = \frac{c^2 \cos \chi}{4\pi \Sigma_p}, \quad (1.11)$$

где знаки + и - означают точки на ионосфере в разных полушариях Земли,  $\chi$  – угол между силовой линией и вертикально к ионосфере,  $\Sigma_p$  – проинтегрированная по высоте педерсеновская проводимость ионосферы, и  $dl = \sqrt{g_3} dx^3$  – элемент длины вдоль силовой линии.

**Решение волнового уравнения в ВКБ-приближении по радиальной координате.** Как известно, при использовании метода ВКБ для решения обыкновенных дифференциальных уравнений величина волнового вектора находится через решение некоторого алгебраического уравнения. Леонович и Мазур, адаптировав этот метод к решению дифференциальных уравнений в частных производных типа (1.10), показали, что радиальная компонента волнового вектора  $k_{1N}$   $N$ -ой продольной гармоники стоячей волны определяется как собственное значение задачи

$$k_{1N}^2 \hat{L}_T(\omega) F_N + k_2^2 \hat{L}_P(\omega) F_N = 0; \quad F_N(x^1, x_{\pm}^3) = 0, \quad (1.12)$$

[Leonovich and Mazur, 1993], причем собственная функция этой задачи  $F_N(x^1, x^3)$  описывает продольную структуру волны. Необходимым условием применимости ВКБ-приближения является большая величина азимутального волнового числа,  $m \gg 1$ . Достаточное условие будет указано ниже.

Величина  $k_1^2$  зависит от  $\omega$  и  $x^1$ . Вблизи некоторых магнитных оболочек, называемых, соответственно, полоидальной  $x_{PN}^1$  и тороидальной  $x_{TN}^1$  поверхностями,

$k_{1N}$  стремится, соответственно, к нулю и к бесконечности:

$$k_{1N}^2 \propto \omega^2 - \Omega_{PN}^2(x^1) \quad (1.13)$$

при  $x \simeq x_{PN}^1$ ,

$$k_{1N}^2 \propto [\Omega_{TN}^2(x^1) - \omega^2]^{-1} \quad (1.14)$$

при  $x \simeq x_{TN}^1$ . Здесь  $\Omega_{PN}^2$  и  $\Omega_{TN}^2$  – собственные частоты операторов  $\hat{L}_P(\omega)$  и  $\hat{L}_T(\omega)$ . Заметим, что сингулярность на тороидальной поверхности – это и есть альфвеновский резонанс.

Вблизи полоидальной и торидаальной поверхностей условия применимости ВКБ-приближения не выполняются. Как показано в [Leonovich and Mazur, 1993], необходимым и достаточным условием применимости ВКБ-приближения является

$$m \frac{|x_{PN}^1 - x_{TN}^1|}{a} \gg 1,$$

где  $a$  – характерный масштаб неоднородности магнитосферы в радиальном направлении. Физически это условие означает, что между полоидальной и торидаальной поверхностями укладывается большое число радиальных длин волн.

Важно отметить, что  $\Omega_{TN}^2 - \Omega_{PN}^2 \neq 0$  уже в холодной плазме (при  $\beta = 0$ ), но при  $N > 1$  их разность – пренебрежимо малая в холодной плазме величина. При  $\beta > 0$  можно получить следующую оценку в продольном ВКБ-приближении:

$$\Omega_{TN}^2 - \Omega_{PN}^2 = - \frac{\oint dl \frac{\eta v_A}{R} \left(1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{4}\right)}{\oint \frac{dl}{v_A} \left(1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{4}\right)}, \quad (1.15)$$

где интегрирование ведется вдоль силовой линии «туда и обратно»,  $dl = \sqrt{g_3} dx^3$ , величина  $\eta$  определяется как

$$\eta = \frac{4\pi}{B_0^2} \left[ \frac{\partial_1(P_{0\parallel} + P_{0\perp})}{\sqrt{g_1}} + \frac{2(\gamma_{\perp} P_{\perp} + \gamma_{\parallel} P_{\parallel})}{R} \right].$$

Увеличение разности  $\Omega_{TN}^2 - \Omega_{PN}^2$  в плазме конечного давления имеет принципиально важное значение для теории колебаний магнитосферной плазмы, поскольку ширина области прозрачности волны  $\Delta_N \equiv |x_{TN}^1 - x_{PN}^1|$  пропорциональна этой величине.

Уравнение (1.12) может дать функцию  $\Phi$  только в главном (по параметру  $k_2$ ) порядке поперечного ВКБ-приближения. Для определения распределения амплитуды по радиальной координате воспользуемся законом сохранения энергии. Введем величину

$$w = \frac{1}{2} \oint \left( \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\rho_0}{2B_0^2} c^2 E^2 \right) \sqrt{g} dx^3, \quad (1.16)$$

представляющую собой энергию альфвеновской волны, сконцентрированную внутри силовой трубки единичного сечения по координатам  $x^1, x^2$ . Представим величину  $\Phi$  в виде

$$\Phi = q_N(x^1) F_N(x^1, x^3). \quad (1.17)$$

Соотношение между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  дается уравнением Максвелла  $i\omega\mathbf{B} = -c\nabla \times \mathbf{E}$ . Интегрируя по частям формулу (1.17) с учетом выражения (1.12), получаем

$$w = \frac{c^2}{8\pi} q_N^2 u, \quad (1.18)$$

где обозначено

$$u = \oint k_{\perp}^2 \sqrt{g} A^{-2} F_N^2 dx^3. \quad (1.19)$$

Здесь  $k_{\perp}^2 = k_{1N}^2/g_1 + k_2^2/g_2$  — квадрат поперечного волнового вектора.

Введем поток вектора Пойнтинга, проинтегрированный по силовой трубке:

$$S_{\perp}^i = \frac{1}{2} \oint s_{\perp}^i \sqrt{g} dx^3, \quad (1.20)$$

где  $\mathbf{s} = (c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  — плотность потока вектора Пойнтинга; индекс  $i$  принимает значения 1 и 2. После вычислений получаем:

$$S_{\perp}^i = \frac{c^2}{8\pi} q_N^2 u v_{gN}^i = w v_{gN}^i. \quad (1.21)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$v_{gN}^i = \left( \frac{\partial k_i}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad (1.22)$$

Величина  $v_{gN}^i$  имеет простой физический смысл: эта  $i$ -тая компонента поперечной групповой скорости волны. В дальнейшем нам понадобится только радиальная компонента  $v_{gN}^1$ ,

$$v_{gN}^1 = -\frac{k_{1N}}{\omega} \frac{1}{u} \oint F_N \hat{L}_T(\omega) F_N dx^3. \quad (1.23)$$

Закон сохранения энергии (теорема Пойнтинга), записанный для данного случая:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{S}_{\perp} = 0. \quad (1.24)$$

Здесь 1-е слагаемое включает и потери энергии из-за диссипации на ионосфере, и передачу энергии волны от дрейфующих частиц. Очевидно, производная здесь просто  $\partial w / \partial t = -2(\gamma_N - \delta_N)w$ , где  $\gamma_N$  — инкремент неустойчивости из-за взаимодействия с частицами, и  $\delta_N$  — декремент затухания из-за взаимодействия с ионосферой. Далее получаем следующее уравнение:

$$\partial_1(q_N^2 u v_{gN}^1) = 2q_N^2 u (\gamma_N - \delta_N). \quad (1.25)$$

Решение этого уравнения есть

$$q_N = C(u v_{gN}^1)^{1/2} \exp\left(-\int \frac{\delta_N - \gamma_N}{v_{gN}^1} dx^1\right), \quad (1.26)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Величина  $\gamma_N$  может быть представлена в виде поправки к радиальной компоненте волнового вектора  $k_1$ . Из уравнения (1.10) получаем величину этой поправки:

$$\gamma_N = \frac{k_2 \omega}{c} \frac{2\pi}{u} \oint \frac{F_N}{B_0 R} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_2}} \text{Im}(P_{\parallel h} + P_{\perp h}) dx^3. \quad (1.27)$$

Декремент находится из граничных условий на ионосфере (1.11):

$$\delta_N = \frac{1}{u\omega^2} \sum_{j=x_{\pm}^3} \left[ a \sqrt{g_1 g_2} k_{\perp}^2 \left( \frac{\partial F_N}{\partial l} \right)^2 \right]_j. \quad (1.28)$$

Теперь мы окончательно получаем решение уравнения (1.10), ограниченное вне области прозрачности волны, с учетом затухания и неустойчивости:

$$\Phi = \frac{C F_N}{\sqrt{\bar{u} v_{gN}^1}} \exp \left[ i \int_{x_{PN}^1}^{x^1} k_{1N}(x^{1'}) dx^{1'} - \int_{x_{PN}^1}^{x^1} \frac{\delta_N - \gamma_N}{v_{gN}^1} dx^{1'} \right]. \quad (1.29)$$

Это выражение показывает, что волна распространяется поперек магнитных оболочек от  $x_{PN}^1$  до  $x_{TN}^1$ , при этом ее поляризация меняется от полоидальной до тороидальной.

Для выяснения структуры моды необходимо знать вид функций  $\delta_N(x^1)$  и  $\gamma_N(x^1)$ . Что касается первой из них, то  $\delta_N(x^1) \simeq const$ . Зависимость  $\gamma_N(x^1)$  можно уяснить из выражения для инкремента неустойчивости волны

$$\gamma_N = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_{N_s},$$

$$\gamma_{N_s} = 2B_0^3 \sqrt{g} \frac{2\pi}{c^2} \frac{1}{\bar{u}} \sum_{e,i} \frac{e^2}{M} \int d\mu d\varepsilon \left(1 - \frac{\omega_*}{\omega}\right) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \times$$

$$\times \omega_b \delta(\omega - \bar{\omega}_d - s\omega_b) \left| \int_a^b \frac{\omega_d J_0 F_N}{|v_{\parallel}|} \cos I_a^l dl \right|^2. \quad (1.30)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $f$  – равновесная функция распределения частиц,  $\omega_b$  – баунс-частота высокоэнергичных частиц,  $\bar{\omega}_d$  – усредненная по баунс-периоду частота дрейфа частиц в неоднородном магнитном поле,  $\omega_*$  – частота диамагнитного дрейфа,  $B_0^3$  – контравариантная компонента геомагнитного поля,  $I_a^l = \int_a^b dl |v_{\parallel}|^{-1} (\omega - \omega_d)$ , где  $a$  и  $b$  – продольные координаты точек отражения частицы в геомагнитной ловушке. Выражение (1.30) получается как следствие решения уравнения Власова, осуществляемого либо интегрированием по невозмущенным траекториям, либо с помощью гирокинетики (оба способа дают один и тот же результат); мы не будем приводить соответствующие выкладки, поскольку они хорошо известны (например, формула (1.30) совпадает с выражением (3.26) из статьи [Karpman et al., 1977], записанной в других переменных).

Отметим, что произведение  $k_{\perp} F_N$  пропорционально электрическому полю волны, так что величина  $u$  ведет себя как азимутальная компонента электрического поля волны  $E_2$ . Соответственно, инкремент неустойчивости максимален вблизи полоидальной поверхности и обращается в нуль при приближении к тороидальной поверхности,  $x^1 \rightarrow x_{TN}^1$ :

$$\gamma_N \propto (x^1 - x_{TN}^1).$$

Это означает, что мнимая добавка к радиальной компоненте волнового вектора вблизи тороидальной поверхности определяется только диссипацией энергии на

ионосфере, т.е. энергия волны полностью поглощается на тороидальной поверхности.

Сильная зависимость инкремента от радиальной координаты вызвана двумя факторами. Во-первых, эффективная передача энергии от частиц волнам возможна только в присутствии большой азимутальной компоненты электрического поля волны; во-вторых, этот компонент электрического поля волны убывает при прохождении волны от полоидальной поверхности до тороидальной. Действительно, за единичное время ион передает волне энергию  $\vec{u}_d \cdot \vec{E}$  (в расчете на единицу заряда), и дрейф происходит в азимутальном направлении.

Убывание инкремента до нуля на тороидальной поверхности означает, что мнимая добавка к радиальной компоненте волнового вектора вблизи тороидальной поверхности определяется только диссипацией энергии на ионосфере, т.е. энергия волны на тороидальной поверхности полностью поглощается.

**Анализ решения.** Рассмотрим некоторые выводы из решения (1.29)). Прежде всего отметим, что инкремент максимален на поверхности  $x_{PN}^1$ , где колебания имеют полоидальный характер. Это привело многих авторов к выводу о том, что наиболее усиленными должны быть радиально-поляризованные пульсации. Однако в действительности ситуация несколько иная: поскольку колебания усиливаются по мере распространения от полоидальной к тороидальной поверхности (сопровождающегося изменением поляризации от радиальной до азимутальной), при росте отношения  $\bar{\gamma}_N/\delta_N$  (где  $\bar{\gamma}_N \equiv \gamma_N(x_{PN}^1)$ ) максимум амплитуды смещается к тороидальной поверхности, т.е. при больших значениях этого отношения наиболее усиленными оказываются колебания, имеющие не полоидальную, а тороидальную поляризацию!

Этот качественный вывод можно проиллюстрировать на примере простой модели, которая качественно передает все основные особенности волны. Радиальная компонента волнового вектора в этой модели определяется по формуле, осуществ-

ляющей сшивку выражений (1.13) и (1.14)

$$k_{1N}^2 = \left( \frac{g_{1e}}{g_{2e}} \right) k_2^2 \frac{\omega^2 - \Omega_{PN}^2(x^1)}{\Omega_{TN}^2(x^1) - \omega^2}, \quad (1.31)$$

где  $g_{1e}, g_{2e}$  – значение компонент метрического тензора на экваторе. Радиальная групповая скорость волны в этой модели есть

$$v_{gN}^1 = \left( \frac{g_{1e}}{g_{2e}} \right) \frac{(\omega^2 - \Omega_{PN}^2)^{1/2} (\Omega_{TN}^2 - \omega^2)^{3/2}}{2\omega k_2 (\Omega_{TN}^2 - \Omega_{PN}^2)}. \quad (1.32)$$

Функции  $\Omega_{PN}(x^1)$  и  $\Omega_{TN}(x^1)$  аппроксимируются линейными зависимостями

$$\Omega_{TN}(x^1) = \Omega_0 \left( 1 - \frac{x^1}{l} \right) \quad (1.33)$$

и

$$\Omega_{PN}(x^1) = \Omega_0 \left( 1 - \frac{x^1 + \Delta_N}{l} \right), \quad (1.34)$$

где  $\Delta_N$  – расстояние между тороидальной и полоидальной поверхностями. Отсюда мы получаем выражение для координаты тороидальной поверхности как решение уравнения  $\omega = \Omega_{PN}(x^1)$ :

$$x_{TN}^1(\omega) = l \left( 1 - \frac{\omega}{\Omega_0} \right). \quad (1.35)$$

Инкремент в этой модели ведет себя как

$$\gamma_N(x^1) = \bar{\gamma}_N \frac{x_{TN}^1 - x^1}{\Delta_N}. \quad (1.36)$$

Подставляя это выражение в (1.29), получаем выражение для  $\Phi(x^1)$ :

$$\begin{aligned} \Phi = & C \left( \frac{2L}{\omega} \tilde{k}_2 \Delta_N \right)^{1/2} (x^1 - x_{PN}^1)^{-1/4} (x_{TN}^1 - x^1)^{-3/4} \\ & \cdot \exp \left[ -\kappa_1 \sqrt{\frac{x^1 - x_{PN}^1}{x_{TN}^1 - x^1}} + \kappa_2 \arcsin \sqrt{\frac{x^1 - x_{PN}^1}{\Delta_N}} \right] \\ & \cdot \cos \left[ \tilde{k}_2 \Delta_N \left( \arcsin \sqrt{\frac{x^1 - x_{PN}^1}{L}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{(x^1 - x_{PN}^1)(x_{TN}^1 - x^1)}}{\Delta_N} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Величины  $\kappa_1 = 4\tilde{k}_2 l_N \delta_N / \omega$  and  $\kappa_2 = 4\tilde{k}_2 l_N \bar{\gamma}_N / \omega$  обозначают обезразмеренные декремент и инкремент.

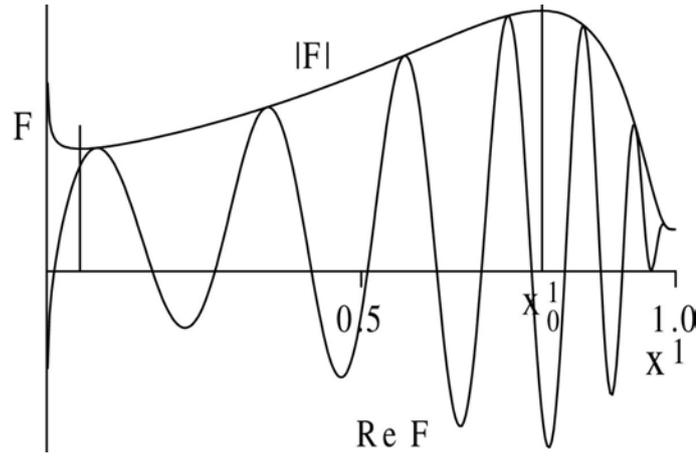


Рисунок 14. Структура волны (сплошная линия) и амплитуда (пунктир) для случая  $\kappa_1 = 1.2$ ,  $\kappa_2 = 3.0$ . Радиальная координата нормирована таким образом, что  $x_{PN}^1 = 0$  и разность  $x_{TN}^1 - x_{PN}^1$  нормирована на единицу. Величина  $x_0^1$  означает координату максимума амплитуды волны. Показано также положение минимума амплитуды

Пример структуры волны, вычисленный на основе этой модели, показан на рис. 14. Максимум амплитуды имеет координату  $x_0^1$ . Зависимость координаты максимума от безразмерного инкремента  $\kappa_2$  при различных значениях безразмерного декремента  $\kappa_1$  показано на рисунке 15 (заметим, что верхняя часть каждой из кривых на этом графике соответствует максимуму, а нижняя — минимуму амплитуды). Из этого рисунка видно, что при увеличении инкремента максимум амплитуды смещается в сторону тороидальной поверхности. Это подтверждает, что наиболее усиленными неустойчивостью оказываются колебания имеющие тороидальную поляризацию.

Полная волновая энергия в области прозрачности также зависит от  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Проследим зависимость полной волновой энергии в области прозрачности от этих величин. Для этого введем интегральный коэффициент усиления

$$\theta = \frac{\int_0^{2\pi} dx^2 \int_{x_{PN}^1}^{x_{TN}^1} dx^1 \bar{u}}{\int_0^{2\pi} dx^2 \int_{x_{PN}^1}^{x_{TN}^1} dx^1 \bar{u}_0},$$

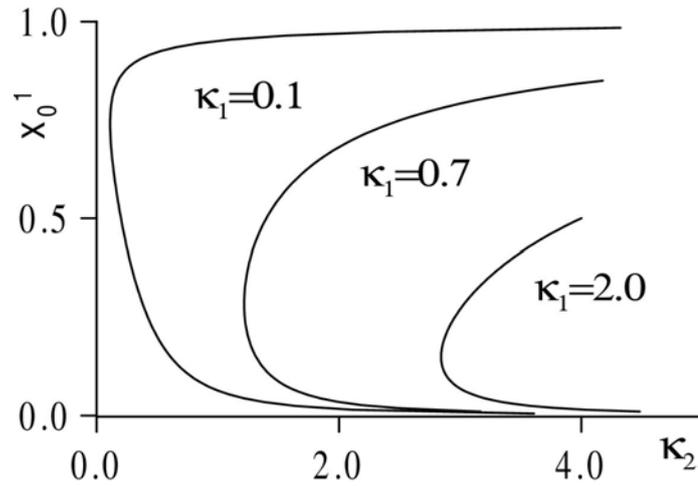


Рисунок 15. Зависимость координаты экстремума амплитуды волны  $x_0^1$  от  $\kappa_2$  при разных значениях  $\kappa_1$ . Радиальная координата выбрана таким образом, чтобы  $x_{PN}^1 = x_{TN}^1 = 0$ . Верхняя половина каждой кривой соответствует максимуму амплитуды волны, нижняя – минимуму амплитуды

где величина  $\bar{u}$  – энергия, заключенная в силовой трубке единичного сечения,  $\bar{u}_0$  – та же величина при отсутствии неустойчивости, но при наличии затухания. Зависимости  $\theta(\kappa_2)$  при разных значениях  $\kappa_1$  показаны на рис. 16. Из этого рисунка видно, что при малой диссипации полная энергия может усилиться на много порядков, тогда как при большом затухании – только в несколько раз. Такая сильная зависимость коэффициента усиления от диссипации может показаться странной, поскольку, на первый взгляд, затухание в числителе и знаменателе должно, грубо говоря, сокращаться. В действительности ничего удивительного в этом нет, поскольку при  $\kappa_1 \gg 1$  затухание и неустойчивость работают в разных частях области прозрачности: при  $\kappa_1 \gg 1$  района тороидальной поверхности достигает только экспоненциально малый «хвост» осцилляции; именно этот «хвост» и усиливается в результате взаимодействия с группой быстрых частиц. В итоге усиление оказывается сравнительно незначительным.

Представляет интерес также вопрос о том, как зависит темп усиления волны от давления. Как видно из (1.30), сам по себе инкремент от этой величины не зависит. Однако от нее зависит ширина области прозрачности  $\Delta_N$ , которая определяется

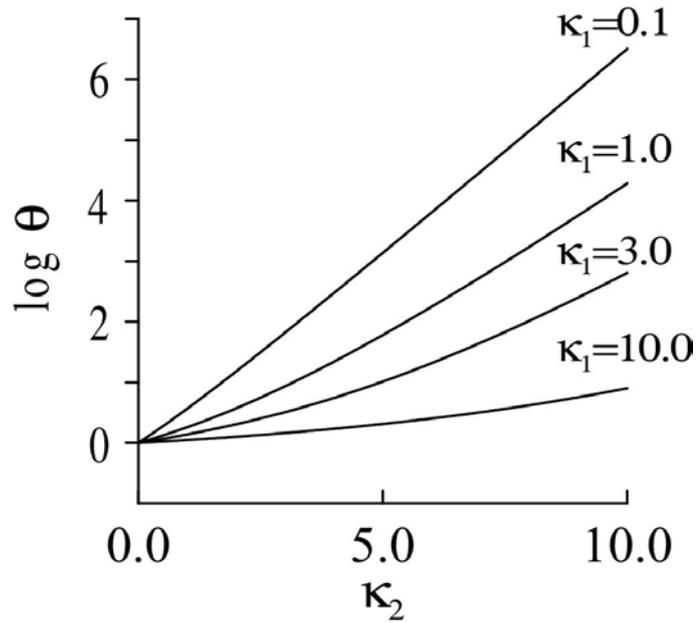


Рисунок 16. Зависимость интегрального коэффициента усиления волны  $\theta$  от параметра  $\kappa_2$  при разных значениях  $\kappa_1$

разностью  $\Omega_{TN}^2 - \Omega_{PN}^2$ , зависящей от  $\beta$  согласно формуле (1.15). Но  $\Delta_N$  определяет также полное количество энергии, закачанной баунс-дрейфовой неустойчивостью в область прозрачности. Для оценки этого эффекта воспользуемся моделью (1.31), в которой радиальная групповая скорость дается выражением (1.32). Из этого выражения видно, что при увеличении ширины области прозрачности одновременно увеличивается групповая скорость волны и в итоге, как это следует из (1.29), темп усиления волны остается неизменным.

Как видно из (1.37), интегральный инкремент есть

$$\exp \int_{x_{PN}^1}^{x_{TN}^1} \frac{\gamma_N}{v_{gN}^1} dx^1 = e^{\pi \kappa_2}. \quad (1.38)$$

Отсюда видно, что увеличение ширины области прозрачности не приводит к увеличению амплитуды волны. Другими словами, полная энергия, закачанная в область прозрачности, не зависит от давления плотной компоненты плазмы.

О величине  $C$ , отражающей деятельность источника колебаний в формуле (1.37), следует сказать отдельно. Обычно считается, что источником пульсаций с  $m \gg 1$  являются микронеустойчивости космической плазмы. Однако неустой-

чивость правильнее рассматривать не как источник волны, а как механизм ее усиления. Для приведения этого механизма в действие уже нужна какая-то затравочная амплитуда. Волна, возбуждаемая сторонним источником, распространяется по магнитосфере, попутно теряя энергию из-за конечной проводимости ионосферы и, если  $\gamma_N > 0$ , приобретая энергию из-за баунс-дрейфового резонанса. Именно так следует трактовать соотношение (1.29). К этому следует добавить, что, если источник распределен более-менее широко по радиальной координате, наибольшее влияние на амплитуду он оказывает вблизи полоидальной поверхности, которую, таким образом, можно рассматривать как магнитную оболочку, на которой происходит возбуждение волны с частотой  $\omega$  и волновым числом  $m$  [Leonovich and Mazur, 1993]. Заметим также, что, с формальной математической точки зрения, решение для  $\Phi$ , ограниченное по радиальной координате, возможно только при учете источника, который появляется как неоднородность (правая часть) волнового уравнения. Роль источника могут играть сторонние токи в ионосфере или магнитосфере.

### 1.2.2 Внезапный импульс

В ряде более ранних работ было рассмотрено возбуждение альфвеновских волн импульсным источником вида  $q(t) = \delta(t)$ , т.е. таким источником, который включается в момент времени  $t = 0$  и тут же выключается [Radoski, 1974; Крылов и др., 1981; Mann and Wright, 1995; Leonovich and Mazur, 1998; Antonova et al., 2000]. Было показано, что в этом случае имеет место трансформация альфвеновских волн из полоидальных в тороидальные, вызванное разбеганием по фазам. Однако в этих работах не учитывалась возможность неустойчивости, связанной с обменом энергией с частицами. Рассмотрим этот вопрос.

В присутствии поляризационного расщепления спектра потенциал альфвеновской волны описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} [x - x_{TN} + ia(\delta - \gamma)] \frac{\partial \Phi(x, \omega)}{\partial x} - K^2 [x - x_{PN} + ia(\delta - \gamma)] \Phi(x, \omega) = q \quad (1.39)$$

[Leonovich and Mazur, 1997; Klimushkin et al., 2004]. Здесь  $q$  — источник волны. Отметим, что кривизна силовых линий учитывается здесь благодаря несовпадению тороидальной и полоидальной поверхностей:  $x_{TN} \neq x_{PN}$ . Поскольку мы рассматриваем волны с  $m \gg 1$ , ролью БМЗ можно пренебречь. Фактически, УНЧ-волна представлена лишь альфвеновской модой. В этом случае в качестве граничных условий можно принять ограниченность решения по радиальной координате:

$$|\Phi(x \rightarrow \pm\infty)| < \infty. \quad (1.40)$$

Как мы видели в предыдущем разделе, при данной частоте волны инкремент неустойчивости альфвеновской волны максимален на полоидальной поверхности и стремится к нулю на тороидальной:

$$\gamma = \tilde{\gamma} \frac{x_{TN} - x}{\Delta_N}. \quad (1.41)$$

Решение уравнения (1.39) представляется в интегральном виде:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \omega) = & \frac{iq}{K} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + K^2}} \\ & \times \exp \left[ ik(x - x_{TN}) + iK\Delta_N \arctan \frac{k}{K} - ak\delta + Ka\tilde{\gamma} \arctan \frac{k}{K} \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

При изучении нестационарных процессов следует произвести фурье-интегрирование по частоте:

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega t} \Phi(x, \omega). \quad (1.43)$$

Если импульсный источник имеет вид дельта-функции по времени, его спектр дается соотношением

$$q(\omega) = -i. \quad (1.44)$$

Подставим это выражение в формулу (1.43), получившееся выражение — в формулу (1.42). Произведем смену порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \omega) = & \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega t} \frac{iq}{K} \int_0^\infty dk F(k) e^{-ikx_{TN}(\omega)} \\ = & \frac{1}{K} \int_0^\infty dk F(k) e^{-ikl} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega t + i\omega kl/\Omega_0}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Внутренний интеграл при этом окажется интегральным представлением  $\delta$ -функции, что позволяет снять интегрирование по переменной  $k$ . В итоге получаем следующее выражение, определяющее пространственно-временную эволюцию возмущения:

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) = & -\frac{2\pi}{K^2} \frac{\Theta(t)}{\sqrt{1 + (t/\tau)^2}} \\ & \times \exp \left[ -i\Omega_{TN}(x)t + iK \arctan \frac{t}{\tau} - aK\delta \frac{t}{\tau} + a\tilde{\gamma}K \arctan \frac{t}{\tau} \right]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Здесь обозначено

$$\tau = \frac{lK}{\Omega_0}; \quad (1.47)$$

$\Theta(t)$  — ступенчатая функция Хевисайда, обозначающая отсутствие возмущения до включения источника (при  $t < 0$ ). Величина  $\tau$  имеет смысл характерного времени трансформации волны. По порядку величины  $\tau \sim m/\Omega_{TN}$ .

Для времени непосредственно после импульса, при  $0 < t \ll \tau$ , формула (1.46) приближенно представляется в виде

$$\Phi(x, t) = -\frac{2\pi}{K^2} \exp \left[ -i\Omega_{PN}(x)t - \frac{a\Omega_0}{l}(\delta - \tilde{\gamma})t \right], \quad (1.48)$$

где для полоидальной частоты  $\Omega_{PN}$  использовано выражение (1.34).

Существенно после включения источника ( $t \gg \tau$ ) решение (1.46) сводится к виду

$$\Phi(x, t) = -\frac{2\pi}{K^2} \frac{\tau}{t} \exp \left[ -i\Omega_{TN}(x)t - a\delta \frac{\Omega_0 t}{l} + iK \Delta_N \frac{\pi}{2} + a\tilde{\gamma}K \frac{\pi}{2} \right]. \quad (1.49)$$

Частота зависит от радиальной координаты, что позволяет говорить о независимых колебаниях силовых линий на разных магнитных оболочках. Как видно из сравнения (1.48) и (1.49), частота волны меняется со временем от полоидальной  $\Omega_{PN}$  до тороидальной  $\Omega_{TN}$  [Leonovich and Mazur, 1998]. Колебания можно рассматривать как квазимонохроматические, если характеристическое время изменения частоты намного превосходит период колебания  $2\pi/\omega$  (в качестве частоты  $\omega$  можно принять и  $\Omega_{PN}$ , и  $\Omega_{TN}$ , поскольку различаются они несильно). Таким образом, должно выполняться условие

$$|K| \gg \frac{2\pi}{\Omega_{TN}} \left| \frac{\partial \Omega_{TN}}{\partial x} \right|.$$

Это условие выполняется для колебаний с  $m \gg 1$ .

Роль азимутальной компоненты волнового вектора играет пространственная производная фазы колебания:

$$k_x = \left| \frac{\partial \Omega_{TN}}{\partial x} \right| t.$$

Как видим, сразу после импульса колебание имеет полоидальную поляризацию, поскольку  $k_x \ll K$ . Через характерное время  $\tau$  поляризация меняется на торoidalную ( $k_x \gg K$ ). Эта трансформация является проявлением разбегания по фазам: если каждая магнитная оболочка колеблется со своей собственной частотой и источник в достаточно широко распределен поперек магнитных оболочек, а в начальный момент все оболочки имеют одну и ту же фазу, то из-за разности частот колебаний на разных оболочках каждая из них будет иметь свою собственную фазу.

Если неустойчивость и диссипация слабы, то амплитуда азимутальной компоненты электрического поля волны  $E_a = -iK\Phi$  постепенно убывает как  $E_a \propto t^{-1}$ , в то время как амплитуда радиальной компоненты  $E_r = -\partial\Phi/\partial x$  постепенно растет, стремясь к некоторой постоянной величине. Как видно непосредственно из (1.46), амплитуда модуля электрического поля  $E = \sqrt{|E_a|^2 + |E_r|^2}$  остается постоянной.

Рассмотрим вклад неустойчивости в эту картину. Как видно из (1.46), рост амплитуды волны из-за неустойчивости описывается фактором

$$|E| \propto \exp \left[ -aK\delta \frac{t}{\tau} + a\tilde{\gamma}K \arctan \frac{t}{\tau} \right]. \quad (1.50)$$

График этой функции для разных значений инкремента приведен на рис. 17. Если диссипация превосходит неустойчивость ( $\tilde{\gamma} < \delta$ ), то вполне ожидаемым образом волна затухает с самого начала. Если неустойчивость сильнее диссипации ( $\tilde{\gamma} > \delta$ ), то сначала амплитуда волны растет, затем убывает. Момент достижения максимума амплитуды волны  $t_m$  определяется как

$$t_m = \tau \sqrt{\frac{\tilde{\gamma}}{\delta} - 1}. \quad (1.51)$$

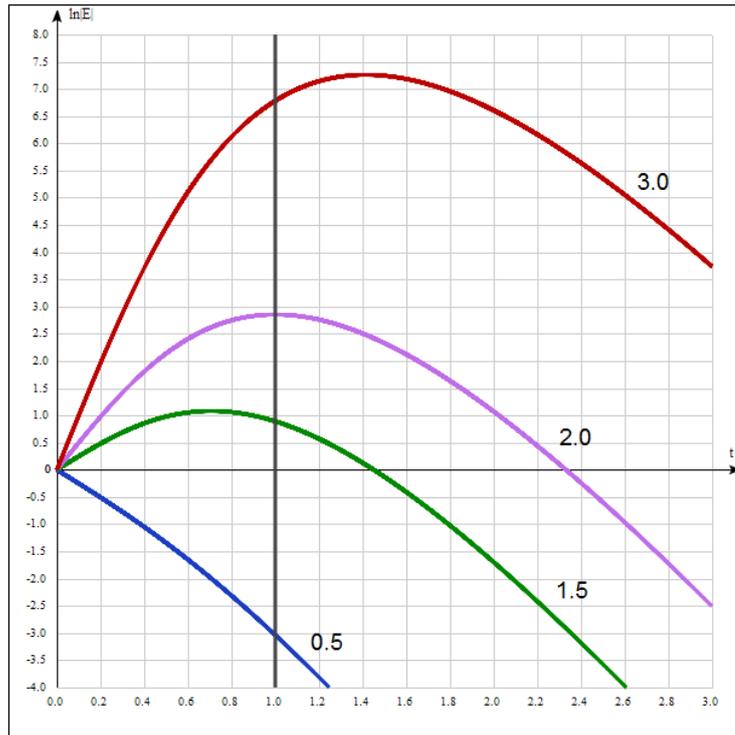


Рисунок 17. Зависимость логарифма амплитуды волны  $|E|$  от времени при разных отношениях  $\tilde{\gamma}/\delta$  (указано около кривых). По вертикальной оси — условные единицы (логарифмический масштаб), время  $t$  нормировано на величину  $\tau$ .

Построение выполнено для  $m = 50$ ,  $\delta/\Omega_{TN} = 0.1$ . Вертикальная прямая разделяет области преимущественно полоидальной (слева от нее) и тороидальной поляризации волны

Если  $t_m > \tau$ , в момент достижения максимума амплитуды волна будет иметь приближенно тороидальную поляризацию. Чем более неустойчивость превосходит затухание, тем большим будет преобладание тороидальной компоненты над полоидальной. Таким образом, как и для монохроматических волн, для импульсно-генерированных пульсаций сильная неустойчивость способствует тороидальной поляризации. Лишь только если инкремент  $\tilde{\gamma}$  не более чем вдвое превосходит декремент  $\delta$ , волна в момент максимальной амплитуды будет иметь приближенно полоидальную поляризацию. Но в этом случае неустойчивость сравнительно слабо скажется на амплитуде волны.

Кроме того, из (1.51) видно, что при  $t \gg \tau$  неустойчивость стабилизируется. Это объясняется тем, что из-за разбегания по фазам электрическое поле волны постепенно становится радиальным, но дрейфующие частицы способны взаимодействовать с волной только благодаря азимутальному электрическому полю. Таким образом, существует механизм стабилизации неустойчивости, связанный не с квазилинейной эволюцией функции распределения, как обычно считается, а с эволюцией самой волны.

Полное увеличение амплитуды волны из-за неустойчивости (по сравнению со случаем, когда неустойчивость отсутствует, но диссипация все же присутствует) дается соотношением

$$\Gamma = \exp(a\tilde{\gamma}K\pi/2),$$

т.е. благодаря неустойчивости окончательная амплитуда в  $\Gamma$  раз больше, чем была бы без неустойчивости. По порядку величины этот фактор (коэффициент усиления) составляет

$$\Gamma \sim \exp(\tilde{\gamma}m/\Omega_{TN}). \quad (1.52)$$

Например, если  $\tilde{\gamma}/\Omega_{TN} = 0.1$  и  $m = 100$ , то  $\Gamma \sim 2 \cdot 10^4$ .

### 1.2.3 В каких случаях возможна генерация полоидальных альфвеновских волн неустойчивостями?

Таким образом, и в случае монохроматической, и в случае импульсно-генерированной волны неустойчивость в конечном итоге порождает тороидальную волну. По-видимому, единственный способ избавиться от этого вывода, это предположить, что в большинстве случаев полоидальные альфвеновские волны замкнуты в резонатор поперек магнитных оболочек. В этом случае волны не распространяются поперек магнитных оболочек и обладают дискретным спектром [Vetoulis and Chen, 1994; Leonovich and Mazur, 1995b; Klimushkin, 1998a; Черемных и др., 2016]. Поперечный резонатор для альфвеновской волны может существовать в районе кольцевого тока (на минимуме полоидальной частоты) и в районе внешней кромки плазмопаузы (на максимуме полоидальной частоты).

Для полоидальных альфвеновских волн в поперечном резонаторе характерны следующие свойства:

1. Сильная локализация поперек силовых линий;
2. Независимость частоты от магнитной оболочки (частота характеризуют резонатор как целое);
3. Амплитудная модуляция, возникающая при сложении нескольких собственных гармоник резонатора [Yeoman et al., 2012; Mager and Klimushkin, 2013].

Приведем некоторые наблюдательные данные, указывающие, что наблюдаемые полоидальные волны действительно могут быть связаны с поперечными резонаторами

Во-первых, трансформация полоидальных пульсаций в тороидальные, являющаяся характерной особенностью альфвеновских мод с непрерывным спектром, была отмечена только в небольшом количестве случаев [Leonovich et al., 2015; Sarris et al., 2009; Zolotukhina et al., 2008; Takahashi et al., 2018a; Wei et al., 2019]. Однако если большинство наблюдаемых полоидальных пульсаций являются модами с дискретным спектром, замкнутыми в резонатор, то частота не зависит от L-оболочки и трансформация не обязана происходить. Для таких мод более характерна амплитудная модуляция, обусловленная суперпозицией поперечных мод с различными радиальными гармониками.

Амплитудная модуляция наблюдается у гигантских пульсаций (Pg) — единственной разновидности азимутально-мелкомасштабных альфвеновских волн ( $m \sim 20$ ), регистрируемых на поверхности Земли. Исследования с помощью наземных магнитометров выявили сильную локализацию этих волн поперек магнитных оболочек. В проекции на земную поверхность, область их локализации составляет 200–300 км в направлении север-юг, что составляет примерно  $1 R_E$  в магнитосфере [Green, 1979; Glassmeier, 1980; Клейменова и др., 1990; Chisham et al., 1992]. При этом частота гигантских пульсаций не зависит от магнитной широты [Takahashi et al., 2011]. Как показано в работе [Chisham et al., 1997], широтный профиль ги-

гантских пульсаций описывается функцией Гаусса. Все эти факты позволяют предположить, что гигантские пульсации являются собственными модами резонатора на внешней кромке плазмопаузы [Mager and Klimushkin, 2013].

Полоидальные волны с  $m \sim 50 - 150$  и сильной локализацией поперек магнитных оболочек в районе внешней кромки плазмопаузы часто регистрируются также с помощью спутников [Hughes et al., 1977; Singer et al., 1982; Cramm et al., 2000; Schäfer et al., 2007, 2008; Liu et al., 2011; Chi and Le, 2015; Dai et al., 2015] и радаров [Fenrich and Samson, 1997; Fenrich et al., 1995]. В работе [Takahashi and Anderson, 1992] показано наличие заметного повышения интенсивности полоидальных волн вблизи плазмопаузы по данным спутника AMPTE/CSE. Во всех этих случаях масштаб локализации поперек магнитных оболочек чуть меньше  $1 R_E$ . Отсюда можно заключить, что резонатор в районе плазмопаузы является довольно распространенным явлением.

Вместе с тем, в некоторых случаях наблюдались полоидальные волны с периодом, независимым от L-оболочки, локализованные на резких неоднородностях плотности вне плазмосферы [Engebretson et al., 1992; Liu et al., 2013] и в районе кольцевого тока [Denton et al., 2003; Yeoman et al., 2012]. В работе [Yeoman et al., 2012] с помощью радаров системы SuperDARN изучена пульсация, пространственно-временное поведение которой совпадает с предсказаниями теории резонатора для импульсно-возбужденных мод. В работе [Mager et al., 2018] была изучена полоидальная альфвеновская волна на внешней кромке плазмопаузы с несколькими максимумами в спектре, примерно соответствующими собственным гармоникам резонатора.

Таким образом, можно сделать вывод, что значительная часть полоидально-поляризованных пульсаций в магнитосфере представляет собой колебания с дискретным спектром, являющиеся модами альфвеновского резонатора. Именно в этом случае неустойчивость сможет породить альфвеновскую волну с преимущественно полоидальной поляризацией.

### 1.3 Импульсное возбуждение альфвеновских волн

Случай дельта-образного импульса, широко распределенного по L-оболочкам, описанного в разделе 1.2.2, является весьма идеализированным. В данном разделе мы рассмотрим два других случая импульсной генерации альфвеновских волн: импульс имеет конечную длительность, но широко распределен по L-оболочкам, и импульс является дельта-образным, но сконцентрированным на одной L-оболочке.

#### 1.3.1 Импульсный источник конечной длительности

Монохроматический и импульсный источники в некотором смысле являются противоположными друг другу: первый из них является  $\delta$ -функцией по частоте, второй —  $\delta$ -функцией по времени. Оба они вряд ли могут быть рассмотрены как достаточно реалистичные. Процессы возбуждения волн в магнитосфере должны быть нестационарными, но иметь конечную длительность. Источник такого типа был рассмотрен ранее в работах [Southwood and Kivelson, 1990; Wright, 1992]. Однако там не принималось во внимание поляризационное расщепление спектра, поэтому их результаты нельзя применять для азимутально-мелкомасштабных волн в дипольно-подобной магнитосфере.

Рассмотрим квазимонохроматический источник с частотой  $\omega_0$ , включающийся в момент времени  $t = 0$  и выключающийся через промежуток времени  $T$ :

$$q(t) = q_0 e^{-i\omega_0 t} \Theta(t)\Theta(T - t), \quad (1.53)$$

спектр которого

$$q(\omega) = q_0 \int_0^T e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (1.54)$$

или

$$q(\omega) = q_0 \frac{e^{i(\omega - \omega_0)T} - 1}{i(\omega - \omega_0)}. \quad (1.55)$$

Желая изучить переход к монохроматическому режиму, мы будем полагать период времени  $T$  достаточно большим, так что  $\omega_0 T \gg 1$ .

Подставляя выражение (1.54) в формулу (1.42) и получившееся выражение — в формулу (1.43), получаем:

$$\Phi(x, t) = \frac{iq_0}{K} \int_0^\infty dk F(k) \int_0^T dt' \exp(-i\omega_0 t') \delta \left[ t' - \left( t - \frac{kl}{\Omega_0} \right) \right],$$

или

$$\Phi(x, t) = \frac{iq_0}{K} \exp(-i\omega_0 t) \int_0^{t\Omega_0/l} dk F(k) \quad (1.56)$$

при  $0 < t < T$  и

$$\Phi(x, t) = \frac{iq_0}{K} \exp(-i\omega_0 t) \int_{(t-T)\Omega_0/l}^{t\Omega_0/l} dk F(k) \quad (1.57)$$

при  $t > T$ .

Рассмотрим процесс включения источника ( $t < T$ ). Введем новую переменную

$$\eta = t/\tau,$$

где  $\tau$  — характерное время трансформации волны (1.47).

**Начальный этап эволюции.** Интеграл (1.56) можно оценить с помощью интегрирования по частям. В этом случае основной вклад в интеграл вносят вносят окрестности концов промежутка интегрирования. Условия применимости этого приближенного метода нарушаются если фаза волны имеет экстремум внутри области интегрирования. В нашем случае это момент времени  $t_0$  — время прохождения волнового пакета, движущегося с групповой скоростью  $v_{gr}$  (см. 1.32) от полоидальной поверхности до оболочки с радиальной координатой  $x$ :

$$t_0(x, \omega) = \int_{x_{PN}}^x \frac{dx'}{v_{gr}} = \tau \sqrt{\frac{x - x_{PN}}{x_{TN} - x}} \quad (1.58)$$

При  $t \ll t_0$  получаем:

$$\Phi(x, t) = \frac{q_0}{K^2} \left\{ \frac{\exp[-i\Psi(x, t) + g(\eta)]}{\sqrt{1 + \eta^2} \left[ (x - x_{TN}) + \frac{\Delta_N}{(1 + \eta^2)^2} \right] + ia\delta - \frac{ia\gamma}{(1 + \eta^2)^2}} - \frac{\exp(-i\omega_0 t)}{x - x_{PN} + ia(\delta - \gamma)} \right\}, \quad (1.59)$$

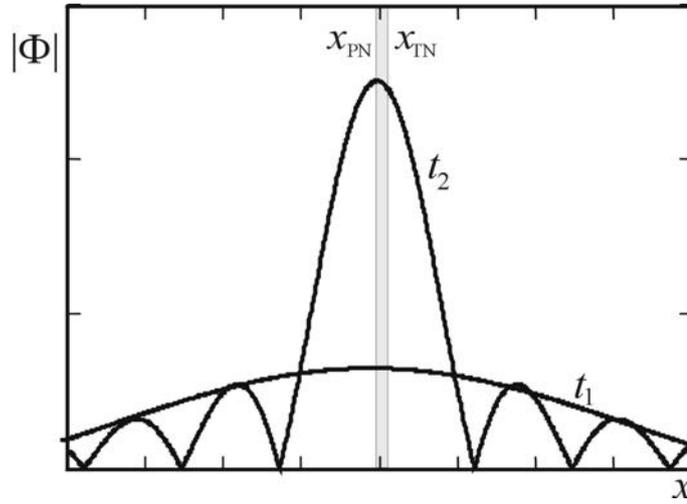


Рисунок 18. Пространственной структуры волны сразу после включения источника в два момента времени ( $t_2 > t_1$ ). Вертикальная полоса обозначает область прозрачности

где обозначено

$$\Psi(t, x) = \Omega_{TN}(x)t - K\Delta_N \arctan \frac{t}{\tau}.$$

В выражении (1.59) мнимая часть аргумента первого слагаемого в фигурных скобках дает величину

$$\Omega(t, x) \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

которую можно назвать локальной мгновенной частотой волны. Эта величина меняется от  $\Omega_{PN}$  до  $\Omega_{TN}$ .

Временная эволюция волнового поля сопровождается также все большей его «изрезанностью» по радиальной координате, связанной с разбеганием по фазам (рис. 18). Роль радиального волнового вектора играет величина

$$\tilde{k}_x(t, x) \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

При  $t \gg \tau$  эта величина растет со временем как  $|\tilde{k}_x| = |d\Omega_{TN}/dx|t$ . Это говорит о том, что колебания меняют со временем свою поляризацию с полоидальной на тороидальную за характерное время  $\tau$ .

На начальном этапе эволюции по порядку величины амплитуда волны есть  $|\Phi| \sim qK^{-1}(K\Delta_N)^{-1}$ . При  $K\Delta_N \gg 1$  это много меньше чем амплитуда монохроматической волны: колебание еще только растет.

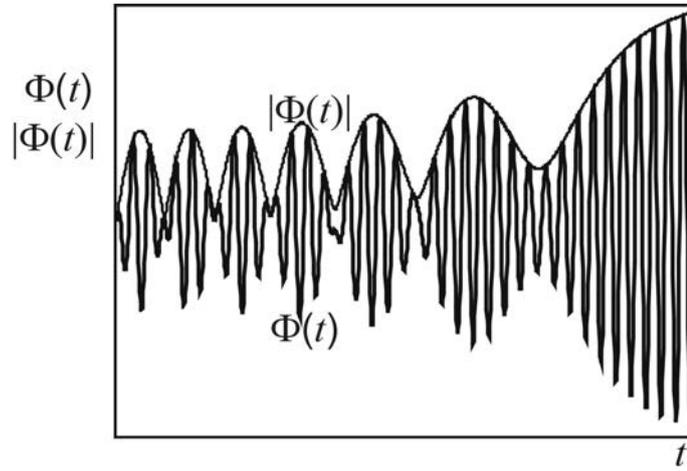


Рисунок 19. Временное поведение волнового поля в некоторой точке пространства сразу после включения источника

Знаменателем первого слагаемого выражения (1.59) отвечает за изменение амплитуды волны со временем. Как нетрудно видеть, эта величина уменьшается, т.е. амплитуда волны растет (рис. 19). Отметим, что при отсутствии кривизны силовых линий, когда  $\Delta_N = 0$ , амплитуда этого слагаемого, наоборот, уменьшается из-за множителя  $[1 + (t/\tau)^2]^{-1/2}$  в первом слагаемом, который ассоциируется с разбеганием начального возмущения по фазам. В этом проявляется существенное отличие волн в магнитосфере с кривыми силовыми линиями от случая прямых линий.

Амплитуда волны также возрастает из-за неустойчивости, которая с течением времени постепенно стабилизируется, поскольку  $a\gamma K \arctan(t/\tau) \rightarrow a\gamma K \pi/2$ . За затухание волны отвечает слагаемое, содержащее диссипативный член  $\delta$  под знаком экспоненты. Этот фактор связан с потерей энергии из-за конечной проводимости ионосферы.

Рассмотрим теперь самое начало включения источника, когда  $t \ll \tau$ , считая также  $a\delta$  и  $a\gamma$  пренебрежимо малыми по сравнению с  $\Delta_N$ . Тогда выражение (1.59) существенно упростится:

$$\Phi(x, t) = \frac{q_0}{K^2[x - x_{PN}(\omega_0)]} \left[ e^{-i\Omega_{PN}(x)t} - e^{-i\omega_0 t} \right]. \quad (1.60)$$

Эта формула описывает биения с несущей частотой  $(\Omega_{PN} + \omega_0)/2$  и частотой модуляции  $(\Omega_{PN} - \omega_0)/2$ . Колебание с частотой  $\Omega_{PN}$  отражает эволюцию начального

возмущения поля, возникшего в момент включения источника. Колебание с частотой  $\omega_0$  обусловлено продолжающейся работой источника.

Если знаменатель выражения (1.59) обращается в нуль, метод интегрирования по частям не может быть использован для асимптотической оценки интеграла. Нетрудно видеть, что обращение в нуль имеет место в момент времени  $t_0$ . Формально рассмотрим асимптотику (1.59) при  $t_0 - t \ll \tau$  в области пространства, достаточно удаленной от полоидальной поверхности, так чтобы можно было пренебречь вторым слагаемым выражения (1.59):

$$\Phi(x, t) = \frac{q_0 \tau \sqrt{\Delta}}{2K^2} \frac{\exp \left[ -i\omega_0 t i \phi(\omega_0, x) - \frac{i\alpha}{2} (t - t_0)^2 \right]}{(t_0 - t)(x - x_{PN})^{1/2}(x_{TN} - x)}, \quad (1.61)$$

где

$$\alpha = \frac{\tau^2 \Delta_N}{K} [x - x_{PN}(\omega_0)]^{-1/2} [x_{TN}(\omega_0) - x]^{-3/2}. \quad (1.62)$$

Не желая переусложнять формулы, при выводе (1.61) мы пренебрегли затуханием и неустойчивостью.

**Прохождение волнового фронта.** Рассмотрим эволюцию при  $t \simeq t_0$  более подробно. Смысл величины  $t_0$  нам уже известен: за это время в точку с координатой  $x$  добирается волновой фронт, движущийся с радиальной групповой скоростью от полоидальной поверхности. Важно отметить, что этот фронт распространяются только в пределах области прозрачности, поскольку вне этой области квадрат времени  $t_0^2 < 0$ . Отсюда следует, что вне области прозрачности эволюция все время будет определяться разбеганием по фазам.

Для исследования ситуации при  $t \simeq t_0$  вернемся к выражению (1.43). Интеграл по  $dk$  оценим по методу стационарной фазы. В выражении для  $q(\omega)$  в (1.54) заменим переменную интегрирования  $t$  на  $t'$ . Подставляя все это в (1.43), получаем:

$$\Phi(x, t) = \frac{i q_0}{2\pi K} \int_{-\infty}^{\infty} dt' q(t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t') + i\phi} f e^{\Gamma}. \quad (1.63)$$

Здесь

$$f(x) = \frac{iq\sqrt{\pi}}{K^{3/2}(x_{TN} - x)^{1/4}(x - x_{PN})^{1/4}} \quad (1.64)$$

$$\phi(x) = \int_{x_{PN}}^x k_x(x') dx' \quad (1.65)$$

$$= -K\sqrt{(x - x_{PN})(x_{TN} - x)} + K\Delta_N \arctan \sqrt{\frac{x - x_{PN}}{x_{TN} - x}}, \quad (1.66)$$

$$\Gamma(x) = -a\delta\sqrt{\frac{x - x_{PN}}{x_{TN} - x}} + Ka\gamma \arctan \sqrt{\frac{x - x_{PN}}{x_{TN} - x}}. \quad (1.67)$$

Так как при  $T \rightarrow \infty$  спектральная плотность источника локализована вблизи  $\omega = \omega_0$ , основной вклад в интеграл вносит именно эта окрестность. Для начала разложим  $\phi(x, \omega)$  в точке  $\omega = \omega_0$  до линейного члена:

$$\phi(\omega, x) = \phi(\omega_0, x) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \cdot (\omega - \omega_0). \quad (1.68)$$

Заметим, что  $\partial \phi(\omega_0, x)/\partial \omega$  есть время  $t_0$ . Подставляя (1.68) в (1.63), получаем после некоторых преобразований:

$$\Phi = q_0 f_0(x) \Theta[t - t_0(x)] \Theta[T - t + t_0(x)] e^{-i\omega_0 t + i\phi_0(x) + \Gamma_0(x)}. \quad (1.69)$$

Здесь индекс «0» обозначает функцию, взятую в точке  $\omega = \omega_0$ , например,  $\phi_0(x) \equiv \phi(\omega_0, x)$ . Две функции Хевисайда в этом выражении описывают передний и задний фронты, проходящие через точку области прозрачности в момент времени  $t_0$ . Как видим, за фронтом структура волны такая же, как у монохроматической волны: можно сказать, фронт приносит с собой монохроматический режим. В приближении (1.68) перед фронтом амплитуда равна нулю; это соответствует тому, что амплитуда волны на начальной стадии эволюции много меньше монохроматической.

Более точное описание волнового фронта можно получить при учете следующего члена разложения функции  $\phi(x, \omega)$  в окрестности точки  $\omega_0$ :

$$\phi(\omega, x) = \phi_0 + \phi'_0(\omega - \omega_0) + \frac{\phi''_0}{2}(\omega - \omega_0)^2, \quad (1.70)$$

где

$$\phi''_0 \equiv \left. \frac{\partial^2 \phi(x, \omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} = \alpha.$$

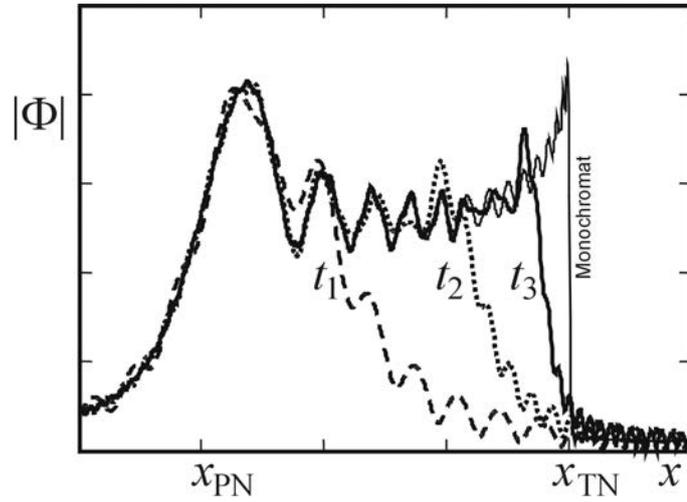


Рисунок 20. Движение волнового фронта: амплитуда волны  $|\Phi(x)|$  в три момента времени. Показана также амплитуда монохроматической волны

Здесь величина  $\alpha$  была определена выражением (1.62). Подставляя (1.70) в (1.63) и учитывая, что мы рассматриваем предел  $T \rightarrow \infty$ , в итоге получаем выражение

$$\Phi(x, t) = \frac{iq_0}{2\pi K} \sqrt{2\pi} f_0(x) \left[ \frac{1-i}{2} + C(z_1) - iS(z_1) \right] e^{-i\omega_0 t + i\phi_0(x) + \Gamma_0(x)}. \quad (1.71)$$

Здесь  $C$  и  $S$  – функции Френеля от аргумента  $z_1 = (t - t_0) / \sqrt{\pi \phi_0''}$ .

Выражение (1.71) описывает волновой фронт, который не имеет такой четкой границы как фронт, описываемый функцией Хевисайда (1.69). Таким образом, в приближении (1.70) мы получили расплывание волнового пакета (рис. 20).

Асимптотика (1.71) при  $z_1 \rightarrow -\infty$  совпадает с (1.61). Таким образом, приближенные решения на начальном этапе эволюции и на этапе прохождения волнового пакета сшиваются между собой.

**Переход к монохроматическому режиму.** При  $t \gg t_0$  воспользуемся представлением

$$\Phi(x, t) = -\frac{iq_0}{K} e^{-i\omega_0 t} \int_0^\infty dk F(k) + \tilde{\Phi}, \quad (1.72)$$

где обозначено

$$\tilde{\Phi} = \frac{iq_0}{K} e^{-i\omega_0 t} \int_{\frac{t\Omega_0}{t}}^\infty dk F(k).$$

В выражении (1.72) первое слагаемое описывает монохроматическую волну. Таким образом, после прохождения волнового фронта мы имеем монохроматическую вол-

ну, на которую наложено нестационарное возмущение, описываемое вторым слагаемым (1.72),  $\tilde{\Phi}$ . С помощью интегрирования по частям нетрудно получить его оценку:

$$\tilde{\Phi}(x, t) = \frac{q_0}{K^2} e^{-i\omega_0 t} \times \frac{\exp [iK(x - x_{TN})\eta + iK\Delta_N \arctan \eta - aK\delta\eta + aK\gamma \arctan \eta]}{\Delta_N(1 + \eta^2)^{-1/2} + (x - x_{TN})(1 + \eta^2)^{1/2}}$$

Если справедливо также неравенство  $t \gg \tau$ , то нестационарная добавка к монохроматическому решению имеет вид

$$\tilde{\Phi}(x, t) = -\frac{q_0}{K^2[x - x_{TN}(\omega_0)]\tau} \exp \left[ -i\Omega_{TN}t - a\delta K \frac{t}{\tau} + iK\Delta_N \frac{t}{\tau} a\gamma K \frac{\pi}{2} \right] \quad (1.73)$$

По порядку величины амплитуда этой добавки есть  $|\Phi| \sim q_0 K^{-1} (K\Delta_N)^{-1}$ . Поскольку  $K\Delta_N \gg 1$ , то это много меньше чем амплитуда монохроматической волны. К тому же со временем мода (1.73) затухает как  $(t/\tau)e^{-a\delta K t/\tau}$ .

Обратим внимание также на то, что произошла стабилизация неустойчивости: баунс-дрейфовый резонанс не участвует в изменении амплитуды волны, он уже усилил амплитуду волны в  $a\gamma K(\pi/2)$  раз. То же самое имело место в случае импульсного возмущения.

Таким образом, после прохождения фронта возмущение представляло собой монохроматическую волну, на которую налагается малая добавка, амплитуда которой уменьшается из-за разбегания по фазам и конечной проводимости ионосферы.

**Решение вблизи резонансных поверхностей.** Вблизи полоидальной поверхности рассуждения предыдущих трех подразделов неприменимы, поскольку, во-первых, решение (1.59) имеет особенность при  $x = x_{PN}(\omega_0)$ , и во-вторых, время прохождения импульса формально равно нулю. Первое обстоятельство говорит о том, что при включении источника именно полоидальная частота играет роль резонансной частоты.

Сначала рассмотрим эволюцию вблизи полоидальной поверхности сразу включения источника. Раскрывая неопределенность в выражении (1.60), которая имеет

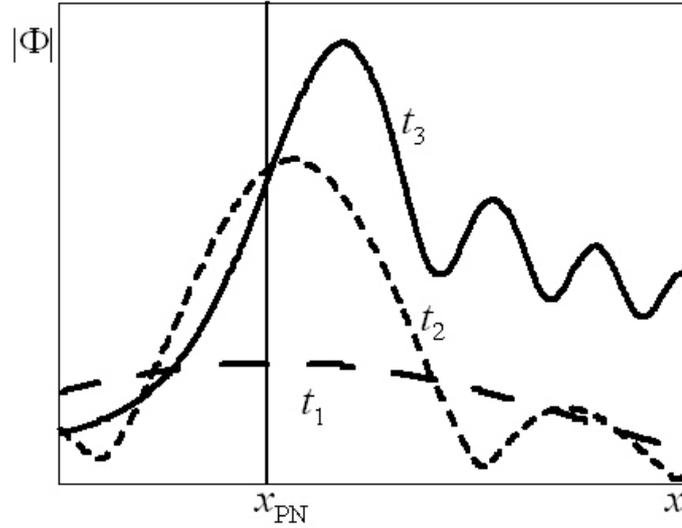


Рисунок 21. Пространственная структура волны в три момента времени

место при  $x = x_{PN}(\omega_0)$ , получаем:

$$\Phi(x, t) = \frac{iq_0}{K} \exp(-i\omega_0 t) \frac{t}{\tau}. \quad (1.74)$$

В этом случае амплитуда волны линейно растет со временем, что вообще характерно для включения источника с частотой равной собственной частоте, что хорошо знакомо из теории колебаний. Секулярный рост наблюдается в течении ограниченного промежутка времени  $t \ll \tau$  и не приводит к бесконечной амплитуде.

Аналитически рассмотреть эволюцию при  $t \gg \tau$  вблизи полоидальной поверхности затруднительно, поскольку там  $t_0 = 0$ . Однако можно воспользоваться тем, что вблизи полоидальной поверхности основная часть интеграла (1.42) набирается при  $k \ll K$ . Тогда интеграл (1.56) можно представить в виде

$$\Phi(x, t) = \frac{iq_0}{K^2} \exp(-i\omega_0 t) \int_0^{t\Omega_0/l} dk \exp \left[ ik(x - x_{PN}) - i \frac{K\Delta_N}{3} \frac{k^3}{K^3} + g(k) \right]$$

и вычислить его численно. Структура волнового поля при нескольких последовательных значениях  $t$  представлена на рис. 21. Мы видим, как постепенно происходит переход от "резонансной" структуры к структуре монохроматической волны.

Что касается тороидальной поверхности, то время установления монохроматической структуры  $t_0$  там бесконечно. Следовательно, при любых разумных предположениях о длительности работы источника  $T$  эта структура там не установится.

**Эволюция волнового поля после выключения источника.** Перейдем к рассмотрению случая  $t > T$ , когда поле представляется интегралом (1.57). Его можно представить в виде

$$\int_{\frac{(t-T)\Omega_0}{l}}^{\frac{t\Omega_0}{l}} F(k)dk = \int_0^{\infty} F(k)dk - \int_0^{\frac{t'\Omega_0}{l}} F(k)dk - \int_{\frac{(T+t')\Omega_0}{l}}^{\infty} F(k)dk,$$

где  $t' = t - T > 0$ . Будем считать, что источник включился достаточно давно, так что к моменту выключения источника волновое поле пренебрежимо мало отличалось от поля монохроматической волны. При этом нижний и верхний пределы в третьем интеграле почти идентичны ( $T/\tau \rightarrow \infty$ ), поэтому этим интегралом можно пренебречь. Первый интеграл описывает монохроматическую волну. Второй интеграл математически эквивалентен интегралу (1.56), который описывал включение колебаний. Таким образом, задача свелась к решенной в предыдущем разделе. Последовательность событий в каждой точке пространства после выключения повторяет то, что происходило при включении, а именно: сначала из поля монохроматической волны вычитается сравнительно малая добавка (при  $t' \ll \tau$  носящая характер биений, затем растущая при приближении заднего фронта), затем через эту точку проходит волновой фронт, "съедающий" монохроматическую волну и оставляющий только малый остаток, тающий за счет разбегания по фазам и омической диссипации на ионосфере. Приведем выражения для поля на этой последней стадии эволюции (при  $t' \gg \tau$ ):

$$\Phi(x, t) \simeq \frac{\tau}{t'} \frac{q_0}{K^2(x - x_{TN})} e^{-i\Omega_{TN}(x)t' - K\alpha\delta\frac{t'}{\tau}}.$$

Пространственная эволюция волны сопровождается увеличением производной функции  $\Phi$  по радиальной координате. Это означает, что волна превращается в тороидально-поляризованную. Это касается и окрестности полоидальной поверхности, где она имела полоидальную поляризацию на стадии монохроматической волны. Характерное время изменения поляризации есть  $t' \sim \tau$ . Таким образом, можно сказать, волна умирает, будучи тороидальной.

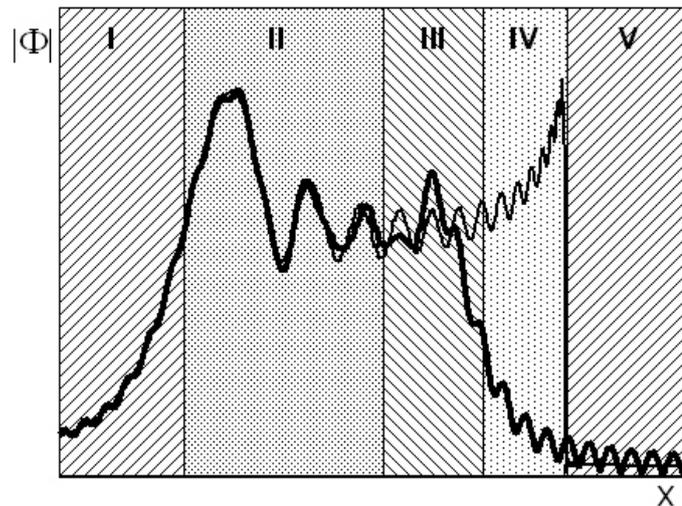


Рисунок 22. Пространственно-временная структура волны во время работы источника: I, V: Разбегание по фазам (за пределами области прозрачности); II: Практически установившаяся монохроматическая волна; III: Прохождение волнового фронта; IV: Разбегание по фазам (в областях, где еще не прошел волновой фронт)

**Заключение.** Таким образом, складывается следующая картина. Сразу после включения источника вблизи полоидальной поверхности формируется волновой фронт, движущийся с групповой скоростью по направлению к тороидальной поверхности. В тех точках, куда фронт еще не дошел, происходит эволюция волнового поля, определяемая явлением смешивания по фазам. При прохождении фронта амплитуда волны резко повышается. Через некоторое время после этого волна оказывается пренебрежимо мало отличающейся от монохроматической (рис. 22).

Неустойчивость усиливает волну только до тех пор, пока она имеет приближенно полоидальную поляризацию. Вне области прозрачности волны фронт не распространяется, поэтому там амплитуда постепенно уменьшается из-за разбегания по фазам, эволюционируя к монохроматической волне. После выключения источника от полоидальной поверхности начинает двигаться задний фронт, как бы уносящий с собой монохроматическую волну, и оставляющий малый остаток, затухающий из-за разбегания по фазам и диссипации на ионосфере.

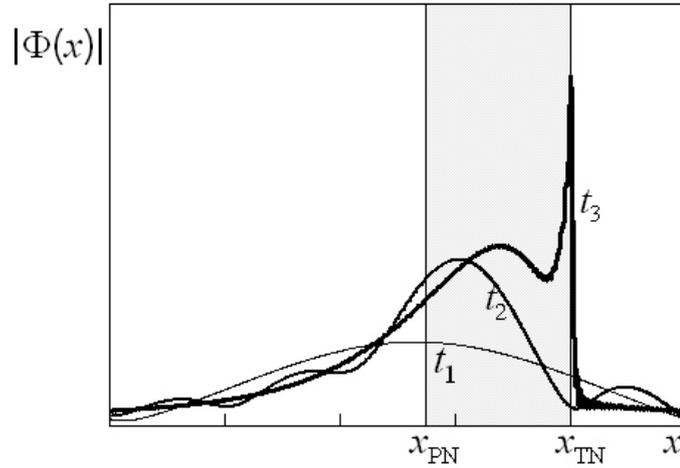


Рисунок 23. Эволюция волнового поля в случае  $K\Delta_N = 6$

Когда источник является дельта-функцией времени, эволюция волнового поля при учете кривизны силовых линий сравнительно мало отличается от случая нулевой кривизны. В нашем случае, когда источник имеет конечную длительность, ситуация резко отличается от случая прямых силовых линий. Переход к этому случаю достигается переходом к пределу  $\Delta_N = 0$ . Обратимся к формуле (1.59). При больших временах ( $t \gg \tau$ ) амплитуда первого слагаемого убывает как  $t^{-1}$  даже при пренебрежимо малой диссипации, т.е. при  $\delta = 0$ . Это означает, что сразу после включения источника поле начинает уменьшаться из-за разбегания исходного возмущения по фазам (кроме непосредственной окрестности тороидальной резонансной поверхности, где постепенно вызревает альфвеновский резонанс, см. [Wright, 1992]). В нашем случае, наоборот, амплитуда растет ввиду приближающегося волнового фронта. Сам этот фронт не имеет аналогов в теории прямых силовых линий, его существование связано с кривизной.

В нашей работе мы рассматривали случай больших азимутальных волновых чисел, когда  $K\Delta_N \gg 1$ . Интересен также случай  $K\Delta_N \sim 1$ , когда  $m$  не очень велико, а кривизна силовых линий не очень мала. В этом случае интеграл (1.56) нетрудно взять численно. Результаты показаны на рис. 23. Как видно, начальная стадия эволюции не сильно отличается от случая  $K\Delta_N \gg 1$ . Затем в стороне от тороидальной поверхности формируется сравнительно плавное повышение ам-

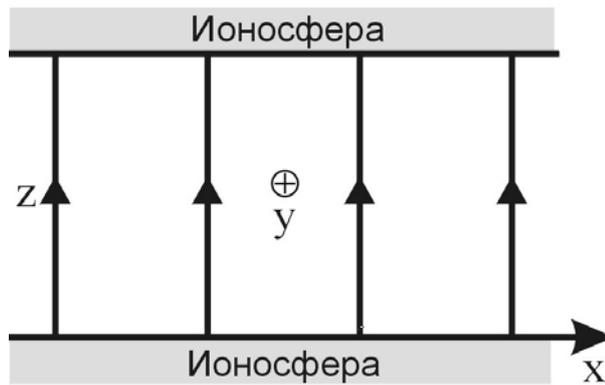


Рисунок 24. Одномерно-неоднородная модель магнитосферы с прямыми силовыми линиями (box model)

плитуды волны. Осцилляторная структура, характерная для случая  $K\Delta_N \gg 1$ , не появляется.

### 1.3.2 Внезапный импульс, локализованный на магнитной оболочке

Источники ряда волновых процессов в магнитосфере связаны с границей магнитосферы. В частности, эту роль может играть резкое сжатие магнитосферы импульсом давления солнечного ветра. С математической точки зрения, это эквивалентно появлению импульса поверхностного тока, текущего по магнитопаузе (или возмущению тока Чепмена-Ферраро) [Glassmeier, 1992]. Предполагается, что поверхностные возмущения на магнитопаузе также порождают движущиеся конвекционные вихри в ионосфере [Glassmeier and Heppner, 1992; Kivelson and Southwood, 1991; Chi et al., 2006]. В данном разделе мы рассмотрим альфвеновские возмущения, порожденные в магнитосфере таким редко локализованным по радиальной координате токовым импульсом.

**Исходные уравнения.** В этой части работы используется 1-мерно неоднородная модель магнитосферы с прямыми силовыми линиями (box model), ранее использованная в работах по альфвеновскому резонансу [Southwood, 1974; Chen and Hasegawa, 1974]. Координата  $z$  направлена вдоль силовых линий, координата  $x$  направлена поперек магнитных оболочек и играет роль радиальной координаты,

координата  $y$  дополняет правую систему координат и играет роль азимутальной координаты (рис. 24). Плазменные параметры меняются только в направлении  $x$ ; все возмущенные величины зависят от продольной и азимутальной координат как  $e^{ik_y y + ik_z z}$ .

Равновесные магнитное поле и плотность обозначены  $\vec{B}$  и  $\rho$ , соответственно; смещение плазмы от положения равновесия обозначено  $\vec{\xi}$ ; электрическое и магнитное поле волны обозначены  $\vec{E}$  и  $\vec{b}$ ; возмущение тока  $\vec{j}$ .

Линеаризованное уравнение малых колебаний в плазме имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad (1.75)$$

где

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad (1.76)$$

и

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \times \vec{B}. \quad (1.77)$$

Предполагается, что волна возбуждена импульсом тока  $\vec{J} = (0, J_y, 0)$  в момент времени  $t_0$  на поверхности  $x_0$ , т.е.

$$J_y = J_0 \delta(x - x_0) \delta(t - t_0). \quad (1.78)$$

Если возмущение вызвано резким сжатием магнитосферы солнечным ветром [e.g. Kivelson and Southwood, 1991; Glassmeier, 1992], то поверхность локализации источника является магнитопаузой.

Следуя работе [Ахиезер, 1974], сторонний ток  $\vec{J}$  должен рассматриваться как слагаемое в законе Ампера:

$$\nabla \times \vec{b} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (1.79)$$

Из уравнений (1.75–1.79) получаем уравнение для электрического поля волны  $\vec{E}(x, t)$ :

$$\frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \quad (1.80)$$

где  $v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$  – альфвеновская скорость.

Предположим, что источник лежит в области непрозрачности быстрого магнитного звука. Тогда колебание будет представлено только альфвеновской модой, для которой

$$\vec{E} = -\nabla_{\perp}\Phi. \quad (1.81)$$

Подставив (1.81) в (1.80) и подействовав оператором  $\nabla_{\perp}$ , мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_z^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_y^2 \left[ -\frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_z^2 \right] \Phi = -\frac{4\pi i k_y}{c^2} \frac{\partial J_y}{\partial t}. \quad (1.82)$$

В качестве граничного условия использовано условие ограниченности решения на большом расстоянии от области локализации волны:

$$\Phi|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (1.83)$$

**Решение в интегральном виде.** После преобразования Фурье по времени получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_z^2 \right] \frac{\partial \Phi_{\omega}}{\partial x} - k_y^2 \left[ \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_z^2 \right] \Phi_{\omega} = q \delta(x - x_0) \omega e^{i\omega t_0}, \quad (1.84)$$

где  $\Phi_{\omega}$  — фурье образ величины  $\Phi(t)$ , и

$$q = -4\pi J_0 k_y / c.$$

Обозначим резонансную (тороидальную) частоту  $\Omega(x) = k_z A(x)$ . Тогда резонансная поверхность  $x_T$  может быть определена как поверхность, где удовлетворяется равенство  $\omega = \Omega(x)$ . Принимая для резонансной частоты линейный профиль

$$\Omega = \Omega_0 \cdot \frac{l - x}{l}, \quad (1.85)$$

координата резонансной поверхности определяется как

$$x_T(\omega) = l \cdot \frac{\Omega_0 - \omega}{\Omega_0}. \quad (1.86)$$

Вблизи этой поверхности выполняется приближенное равенство  $\omega^2 - \Omega^2 \approx 2\omega(\omega - \Omega)$ , и уравнение (1.84) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} [x - x_T(\omega)] \frac{\partial \Phi_{\omega}}{\partial x} - k_y^2 [x - x_T(\omega)] \Phi_{\omega} = q \frac{l}{2\Omega_0} e^{i\omega t_0} \delta(x - x_0).$$

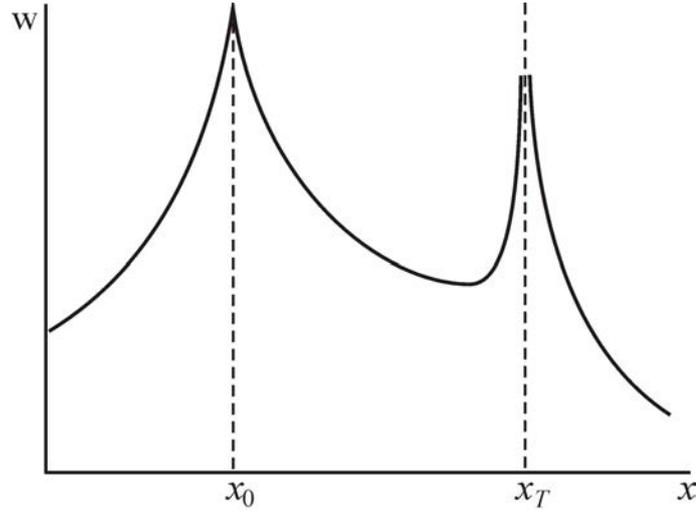


Рисунок 25. Поверхностная волна и альфвеновский резонанс. Здесь  $w$  — плотность энергии волны

Решение этого уравнения может быть записано в интегральном виде

$$\Phi_{\omega} = q \frac{l}{2\Omega_0} e^{i\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{ik(x-x_0)}}{\sqrt{k_y^2 + k^2}} \int_{-\infty}^k dk' \frac{e^{ik'(x_T-x_0)}}{\sqrt{k_y^2 + k'^2}} \quad (1.87)$$

[Leonovich and Mazur, 1999]. Это решение описывает суперпозицию поверхностной волны, экспоненциально спадающую от источника на поверхности с радиальной координатой  $x_0$ , с альфвеновским резонансом на поверхности  $x_T$  (Fig. 25).

Выполняя обратное преобразование Фурье уравнения (1.87) по времени, мы находим решение в виде

$$\Phi(x, t) = \frac{lq}{2\Omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik[x-x_T(\omega)]}}{\sqrt{k_y^2 + k^2}} \int_{-\infty}^k dk' \frac{e^{ik'[x_T(\omega)-x_0]}}{\sqrt{k_y^2 + k'^2}}.$$

Принимая во внимание линейность зависимости  $x_T(\omega)$  в уравнении (1.86), это выражение может быть записано в виде

$$\Phi = \frac{lq}{2\Omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik(x-l)}}{\sqrt{k_y^2 + k^2}} \int_{-\infty}^k dk' \frac{e^{-ik'(x_0-l)}}{\sqrt{k_y^2 + k'^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega[(t-t_0) - \frac{l}{\Omega_0}(k-k')]}.$$

Здесь интеграл по  $\omega$  есть интегральное представление  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega[(t-t_0)-\frac{l}{\Omega_0}(k-k')]} = 2\pi\delta[(t-t_0)-\frac{l}{\Omega_0}(k-k')],$$

Это позволяет произвести интегрирование по  $k'$ . Окончательно получаем следующее выражение:

$$\Phi(x, t) = q\pi\Theta(t-t_0)e^{i(t-t_0)\frac{\Omega_0}{l}(x_0-l)}I, \quad (1.88)$$

где

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik(x-l)-ik(x_0-l)}}{\sqrt{k_y^2+k^2}\sqrt{k_y^2+[k-\frac{\Omega_0}{l}(t-t_0)]^2}}. \quad (1.89)$$

Таким образом, осталось только произвести интегрирование по  $k$ .

**Асимптотическое решение.** Интеграл в выражении (1.89) можно записать в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{S(k)}$$

где «фаза»

$$S = ik(x-x_0) - \frac{1}{2}\ln(k_y^2+k^2) - \frac{1}{2}\ln[k_y^2+(k-\frac{\Omega_0}{l}(t-t_0))^2].$$

Для нахождения асимптотического решения при  $k_y|x-x_0| \gg 1$  используем метод перевала. Точка перевала определяется как точка, где производная  $dS/dk$  обращается в нуль:

$$\frac{dS}{dk} = i(x-x_0) - \frac{k}{k_y^2+k^2} - \frac{k-\frac{\Omega_0}{l}(t-t_0)}{k_y^2+[k-\frac{\Omega_0}{l}(t-t_0)]^2} = 0.$$

Большой параметр  $k_y|x-x_0|$  подразумевает, что в знаменателе либо второй либо третий член является малой величиной. Таким образом, всего существует четыре точки перевала:

$$k_1 \approx +ik_y$$

$$k_2 \approx -ik_y$$

$$k_3 \approx +ik_y + \frac{\Omega_0}{l}(t-t_0)$$

$$k_4 \approx -ik_y + \frac{\Omega_0}{l}(t - t_0)$$

Если мы ищем решение в области  $x < x_0$ , то путь интегрирования должен проходить через точки  $k_2$  и  $k_4$ . Внося поправки за счет конечности величины  $k_y|x - x_0|$ , получаем

$$k_2 = -ik_y + \frac{i}{2(x_0 - x)}$$

и

$$k_4 = -ik_y + \frac{\Omega_0}{l}(t - t_0) + \frac{i}{2(x_0 - x)}.$$

В окрестностях этих двух точек «фаза»  $S$  приближенно равна

$$S \approx S(k_{2,4}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 S(k_{2,4})}{dk^2} (k - k_{2,4})^2,$$

где

$$\begin{aligned} S(k_2) &= -k_y(x_0 - x) - \ln \sqrt{\frac{k_y}{x_0 - x}} \\ &\quad - \ln \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{l^2}(t - t_0)^2 + 2ik_y \frac{\Omega_0}{l}(t - t_0)}, \\ S(k_4) &= -k_y(x_0 - x) + i \frac{\Omega_0}{l}(t - t_0)(x - x_0) - \ln \sqrt{\frac{k_y}{x_0 - x}} \\ &\quad - \ln \sqrt{\frac{\Omega_0^2}{l^2}(t - t_0)^2 - 2ik_y \frac{\Omega_0}{l}(t - t_0)}, \end{aligned}$$

и

$$\frac{d^2 S(k_2)}{dk^2} = \frac{d^2 S(k_4)}{dk^2} = -2(x - x_0)^2.$$

Теперь интеграл  $I$  может быть представлен как сумма двух интегралов в районе точек перевала,

$$I = I_2 + I_4$$

причем

$$\begin{aligned} I_{2,4} &= \int_{-\infty}^{\infty} d(k - k_{2,4}) e^{S(k_{2,4}) - (x - x_0)^2 (k - k_{2,4})^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_y(x_0 - x)}} \frac{e^{-k_y(x_0 - x)}}{\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{l^2}(t - t_0)^2 \pm 2ik_y \frac{\Omega_0}{l}(t - t_0)}}. \end{aligned}$$

Окончательно мы получаем выражение

$$\Phi(x, t) = q\pi^{3/2}\Theta(t - t_0)\frac{e^{-k_y(x_0-x)}}{\sqrt{k_y(x_0-x)}}[F_x(t) + F_0(t)], \quad (1.90)$$

где

$$F_x(t) = \frac{e^{-i\Omega(x)(t-t_0)}}{\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{l^2}(t-t_0)^2 - 2ik_y\frac{\Omega_0}{l}(t-t_0)}},$$

$$F_0(t) = \frac{e^{-i\Omega(x_0)(t-t_0)}}{\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{l^2}(t-t_0)^2 + 2ik_y\frac{\Omega_0}{l}(t-t_0)}},$$

где  $\Omega(x)$  и  $\Omega(x_0)$  — резонансные частоты на данной магнитной поверхности ( $x$ ) и на поверхности локализации источника ( $x_0$ ), соответственно.

**Анализ решения.** Фактор  $\exp[-k_y(x_0-x)]$  в уравнении (1.90) показывает, что решение  $\Phi(x, t)$  обладает свойствами поверхностной волны, локализованной на магнитной поверхности источника. На этом фоне имеется дополнительная пространственная осцилляция описываемая множителем  $\exp[-i\Omega(x)(t-t_0)]$  в слагаемом  $F_x(t)$ . График этой пространственной осцилляции показан на рис. 26, где представлен результат численного вычисления по формуле (1.89).

Характеристический радиальный волновой вектор может быть определен как

$$k_x = \frac{\partial\Omega(x)}{\partial x}(t-t_0).$$

Поскольку компоненты электрического поля волны определены как  $E_y = -ik_y\Phi$  и  $E_x = -\partial\Phi/\partial x$ , увеличение этого радиального волнового вектора со временем подразумевает трансформацию полоидальной альфвеновской волны (большая компонента  $E_y$ ) в тороидальную (большая компонента  $E_x$ ). Причиной этой трансформации является разбегание начального возмущения по фазам.

Посмотрим временную эволюция волнового поля более подробно. Вычислим азимутальное электрическое поле волны:

$$E_y = -ik_yq\pi^{3/2}\Theta(t-t_0)\frac{e^{-k_y(x_0-x)}}{\sqrt{k_y(x_0-x)}}[F_x(t) + F_0(t)]. \quad (1.91)$$

Первое слагаемое в этом выражении  $F_x(t)$  описывает колебание с локальной резонансной частотой  $\Omega(x)$ , как в теории импульсного источника с широкой простран-

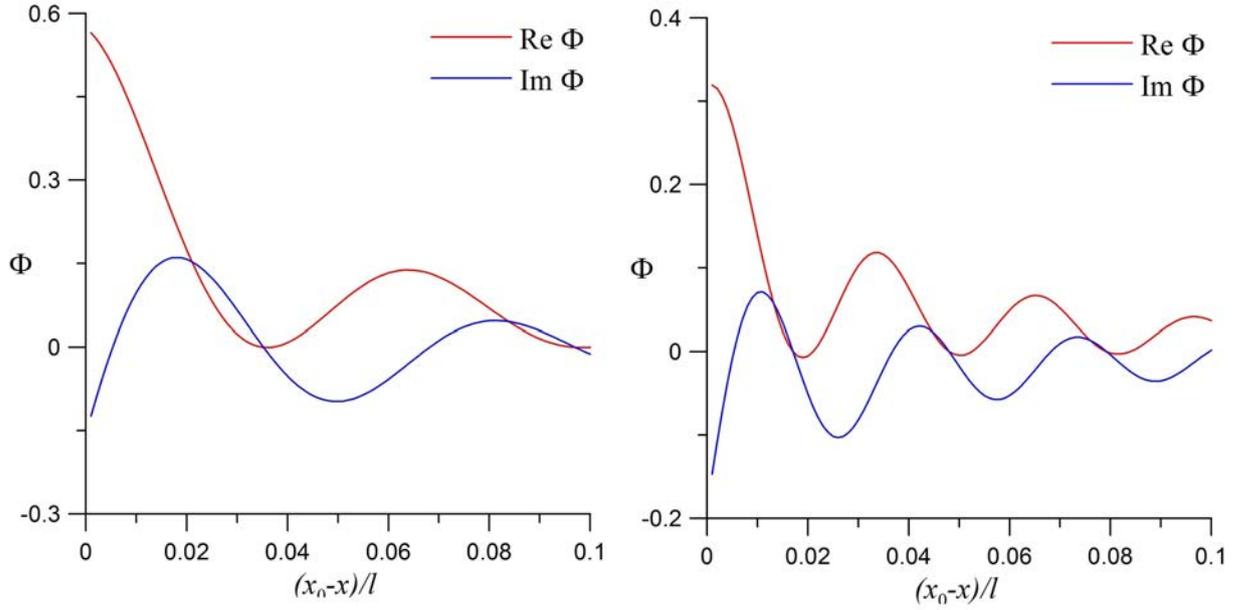


Рисунок 26. Пространственная структура волны в два момента времени: при  $\Omega_0(t - t_0) = 100$  (слева) и  $\Omega_0(t - t_0) = 200$  (справа)

ственной локализацией, разобранный в разделе 1.2.2 (далее мы будем называть ее теорией широкого импульса). Однако кол есть еще и второе слагаемое  $F_0(t)$ , описывающее колебание с частотой  $\Omega(x_0)$ , равной частоте резонанса на поверхности локализации источника. Это слагаемое не имеет аналога в теории широкого импульса. Поскольку эти частоты не равны друг другу ( $\Omega(x) \neq \Omega(x_0)$ ), суперпозиция этих колебаний приводит к биениям, как видно из рисунка 27. Благодаря присутствию квадратных корней в знаменателях в выражениях для  $F_x(t)$  и  $F_0(t)$ , амплитуда колебания в компоненте  $E_y$  убывает со временем. Это видно также из рис. 28, где показана плотность энергии  $w_y = |E_y|^2/8\pi$ , заключенная в этой компоненте, как функция времени.

Пространственно-временное поведение радиальной компоненты электрического поля  $E_x$  дается выражением

$$E_x = q\pi^{3/2}\Theta(t - t_0)e^{-k_y(x_0 - x)} \times \left\{ \sqrt{k_y(x_0 - x)} [F_x(t) + F_0(t)] + \frac{i(t - t_0)}{\sqrt{k_y(x_0 - x)}} \frac{d\Omega(x)}{dx} F_x(t) \right\} \quad (1.92)$$

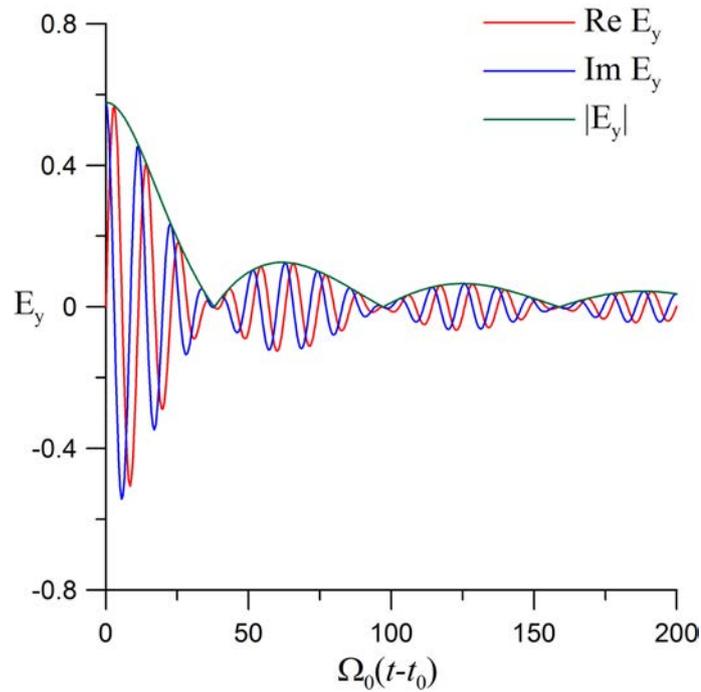


Рисунок 27. Эволюция со временем компоненты  $E_y$  на большом расстоянии от источника,  $(x_0 - x)/l = 0.1$

(рис. 29). Здесь слагаемое  $F_x(t) + F_0(t)$  ведет себя аналогично компоненте  $E_y$ : это биения с убывающей амплитудой. Второе слагаемое пропорционально величине  $F_x(t)$ . Оно представляет собой колебания с локальной резонансной частотой  $\Omega(x)$  на данной магнитной оболочке и ведет и растет как квадратный корень из времени. Амплитуда колебания в компоненте  $E_x$  стремится к постоянной величине. Это можно видеть также из рис. 28, где показана зависимость от времени плотности энергии  $w_x = |E_x|^2/8\pi$ , заключенной в этой компоненте. Мы заключаем отсюда, что энергия передается от азимутальной компоненте электрического поля радиальной.

Полная энергия  $w = w_x + w_y$  на данной магнитной оболочке убывает со временем (см. рис. 28). Однако если энергия где-то убывает, в каком-то другом месте она должна расти. Численные расчеты показывают, что это происходит на поверхности импульса  $x_0$  (рис. 30). Благодаря этому сохраняется полная энергия, проинтегри-

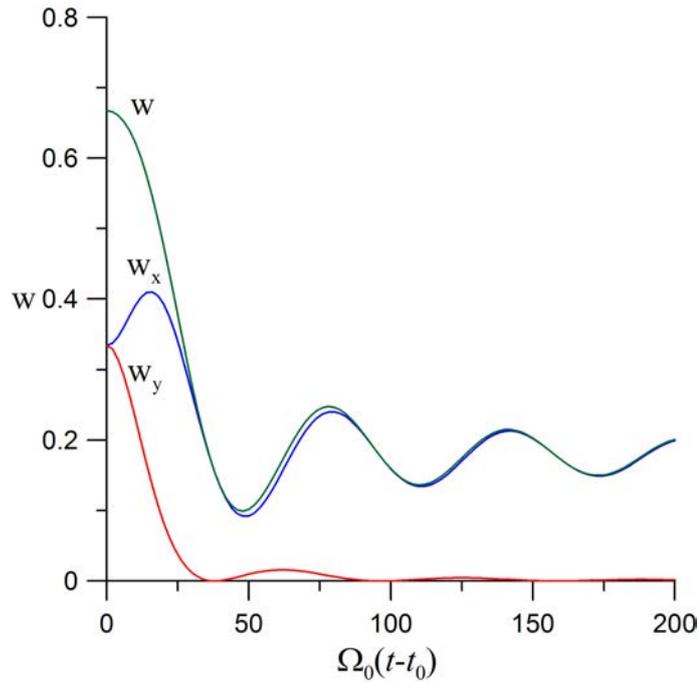


Рисунок 28. Эволюция со временем плотности волновой энергии  $w$  и двух ее составляющих величин  $w_x$  и  $w_y$  на большом расстоянии от источника,  $(x_0 - x)/l = 0.1$ .

рованная по объему

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (E_x E_x^* + E_y E_y^*) dx = \frac{1}{4} \pi^3 q k_y.$$

Это можно доказать, если выразить  $E_x$  и  $E_y$  с помощью уравнений (1.88, 1.89), изменить порядок интегрирования и использовать интегральное представление  $\delta$ -функции.

Рисунок 31 показывает изменение со временем пространственной структуры волны, выраженной через плотность энергии  $w(x)$ . В момент импульса  $t = t_0$  амплитуда плавно спадает с расстоянием от источника. С течением времени энергия аккумулируется вблизи поверхности источника, в то время как вдали от нее она уменьшается, стремясь к некоторой малой постоянной величине. Таким образом формируются ядро и хвост волнового поля. Как видно из рисунка, ширина ядра со временем уменьшается.

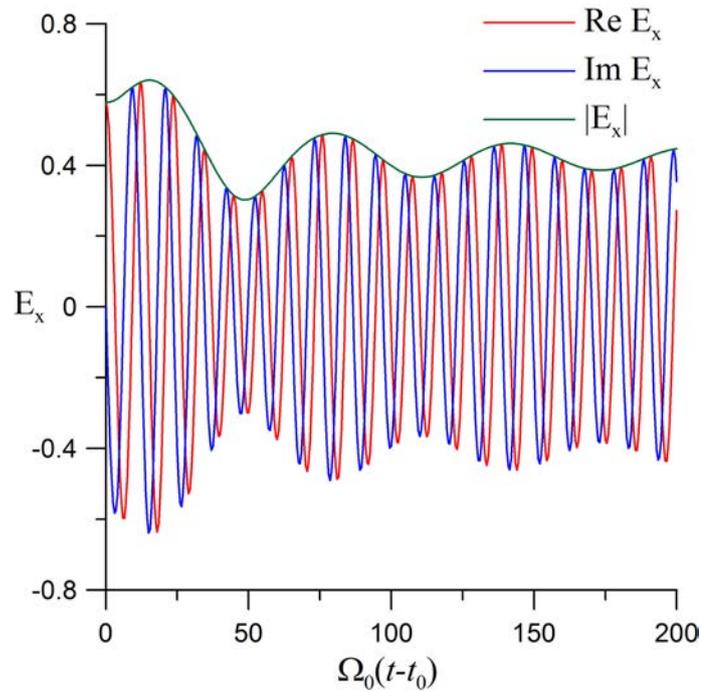


Рисунок 29. Эволюция со временем компоненты  $E_x$  на большом расстоянии от источника,  $(x_0 - x)/l = 0.1$

### 1.3.3 Заключение

Приведенные в разделе 1.3 примеры показывают, что пространственно-временное поведение альфвеновских волн может быть весьма нетривиальным в зависимости от характера источника волны. Действительно, спутниковые наблюдения УНЧ-волн в магнитосфере лишь в исключительных случаях могут быть интерпретированы в рамках простых моделей [Leonovich et al., 2015]. Для интерпретации наблюдательных данных необходимо накопление значительного «багажа» в виде как можно большего количества рассмотренных моделей генерации волн в магнитосфере.

## 1.4 Движущийся источник

Обычно считается, что энергичные частицы возбуждают альфвеновскую волну посредством плазменных микронеустойчивостей. Однако этот механизм не объясняет ряд существенных особенностей такого рода колебаний. Так, наблюдаемые волны

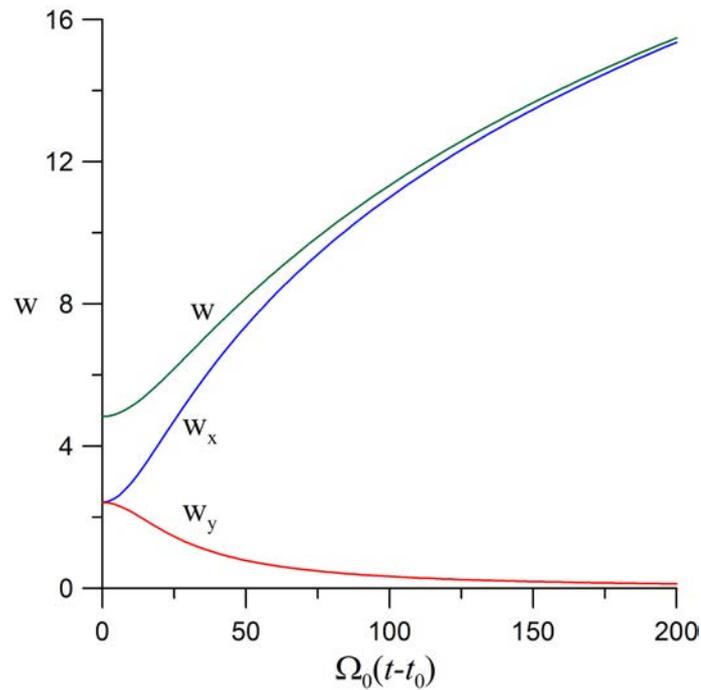


Рисунок 30. Эволюция со временем плотности волновой энергии  $w$  и двух ее составляющих величин  $w_x$  и  $w_y$  на поверхности источника  $x_0$

имеют четко определенные значения азимутальных волновых чисел  $m$ . Но инкремент неустойчивости слабо зависит от азимутального волнового числа для наиболее часто наблюдаемых нестабильных распределений энергичных протонов [Mager and Klimushkin, 2005]. Следовательно, эта неустойчивость не может выделять колебания в узком диапазоне азимутальных волновых чисел. Далее, фазовая скорость наблюдаемых полоидальных альфвеновских волн обычно совпадает с направлением дрейфа протонов в неоднородном магнитном поле. Но при баунс-дрейфовом резонансе неустойчивость в равной степени может генерировать колебания, распространяющиеся в противоположном направлении [Mager and Klimushkin, 2005]. Полоидальные волны быстро трансформируются в тороидальные, в результате чего неустойчивость будет способствовать усилению тороидальных, а не полоидальных колебаний. Наконец, теория неустойчивости вообще ничего не говорит об экваториальном движении фазы полоидальных колебаний, наблюдаемом в радарных экспериментах.

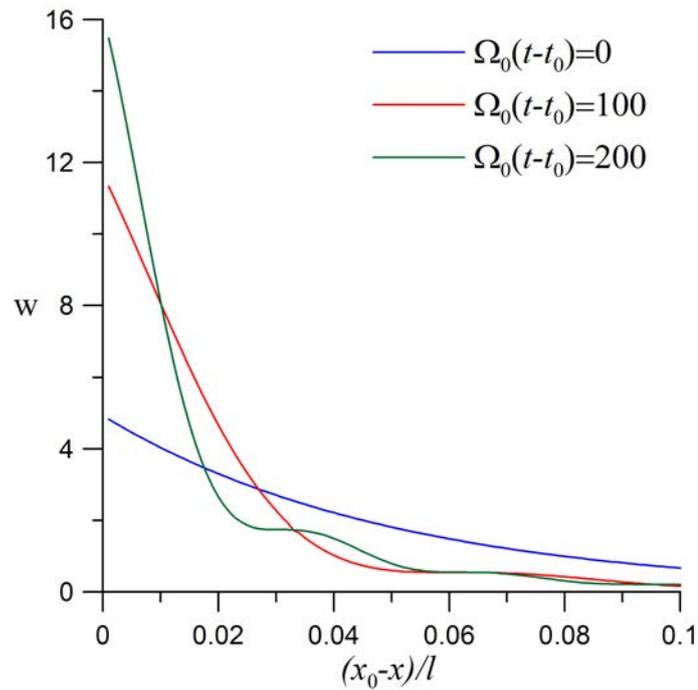


Рисунок 31. Плотность волновой энергии  $w$  на различных расстояниях от источника  $x_0$  в разные моменты времени

Поэтому необходимо рассмотреть также нерезонансные механизмы генерации полоидальных альфвеновских волн. Один из таких механизмов рассмотрела Золотухина [1974]: энергичные частицы, инжектированные в магнитосферу во время суббурь, образуют переменный ток, который возбуждает альфвеновскую волну посредством черенковского механизма (рис. 32). В общефизическом контексте черенковское возбуждение альфвеновских волн рассматривалось еще в работе [Докучаев, 1968]. На важность этого механизма обратил внимание Гульельми [1979]. Позднее в работах [Гульельми и Золотухина, 1980; Pilipenko et al., 2001] было изучено действие этого механизма в продольно-неоднородной магнитосфере, однако эти авторы не останавливались специально на изучении поперечной структуры генерированных волн. Здесь мы займемся этим вопросом.

#### 1.4.1 Структура и эволюция волнового поля

**Основные уравнения.** В работе используется аксиально-симметричная модель магнитосферы, учитывающая кривизну силовых линий и неоднородность фоновой

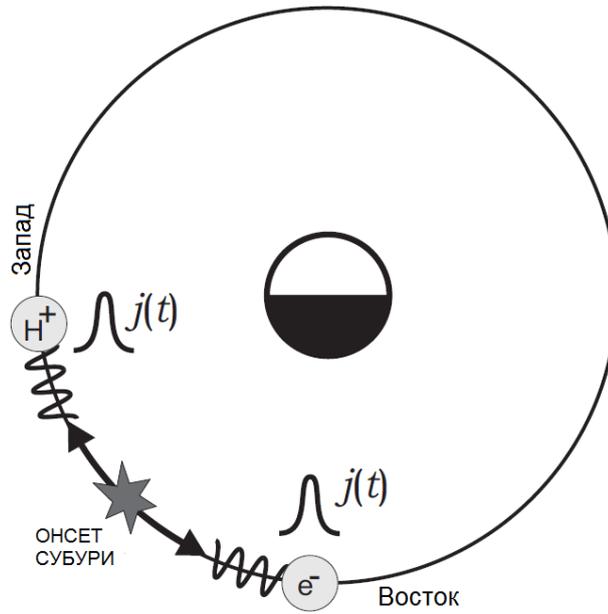


Рисунок 32. Схема генерации альфвеновской волны движущимися облаками плазмы, инжектированными во время суббури

плазмы вдоль силовых линий и поперек магнитных оболочек. Вводится криволинейная система координат  $\{x^1, x^2, x^3\}$ , привязанная к силовым линиям (см. раздел 1.1).

Как и в разделе 1.3.2 источником колебаний является поперечный нестационарный (азимутальный) ток  $\vec{J}$ . Однако предполагается, что он образован дрейфующим облаком заряженных частиц, инжектированных в магнитосферу в результате суббури. Ток не локализован по радиальной координате  $x^1$ , но узко локализован по азимуту. Азимутальная контравариантная компонента этого тока дается выражением

$$J^2 = e n_0 \Omega \delta(\varphi - \Omega t) \Theta(t), \quad (1.93)$$

где  $\Omega$  – угловая скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле,  $e$  и  $n_0$  – заряд и концентрация частиц,  $\Theta(t)$  – функция Хевисайда, задающая момент включения источника (инъекции частиц в магнитосферу),  $\varphi$  – азимутальный угол, который мы будем использовать в качестве координаты  $x^2$ . К физической величине тока можно перейти заменой угловой скорости в выражении (1.93) линейной скоростью  $V = \sqrt{g_2} \Omega$ , зависящей от координат  $x^1$  и  $x^3$ .

Электрическое поле волны  $\vec{E}$ , задаваемое сторонним током, дается выражением (1.80). Выражая электрическое поле волны через потенциал  $\Phi$  согласно (1.81) и действуя поперечным набла-оператором  $\nabla_{\perp}$ , получаем в криволинейной системе координат уравнение

$$\mathcal{L}_A \Phi = -\frac{4\pi}{c^2} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} J^2. \quad (1.94)$$

Здесь

$$\mathcal{L}_A = \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ -\frac{\sqrt{g}}{g_1} \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{g_2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ -\frac{\sqrt{g}}{g_2} \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{g_1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \right] \frac{\partial}{\partial x^2}$$

— альфвеновский дифференциальный оператор. Таким образом мы имеем неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее альфвеновские колебания, генерируемые током дрейфующих в азимутальном направлении частиц. Граничные условия выберем следующие:

$$\Phi|_{x^1, x^2 \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \Phi|_{x^3_{\pm}} = 0.$$

Здесь второе граничное условие соответствует полному отражению волны от ионосферы ( $x^3_{\pm}$  — точки пересечения силовой линии с верхней границей ионосферы); в нашей работе мы не учитываем затухание, возникающее из-за конечной проводимости ионосферы.

**Решение в интегральном виде.** Для решения волнового уравнения (1.94) проделаем преобразование Фурье этого уравнения по  $\varphi$  и по  $t$ . В результате получаем дифференциальное уравнение только по двум переменным  $x^1$  и  $x^3$ :

$$\hat{L}_A \Phi_{m\omega} = \tilde{q}_{m\omega} \quad (1.95)$$

Здесь  $\hat{L}_A$  — Фурье-образ альфвеновского оператора  $\mathcal{L}_A$ , аналогичный альфвеновскому оператору монохроматической волны с частотой  $\omega$  и с азимутальным волновым числом  $m$ , определяемый как

$$\hat{L}_A \equiv \frac{\partial}{\partial x^1} \hat{L}_T(\omega) \frac{\partial}{\partial x^1} - m^2 \hat{L}_P(\omega),$$

где

$$\hat{L}_T(\omega) = \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{g_2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\sqrt{g} \omega^2}{g_1 v_A^2}$$

— оператор тороидальной моды,

$$\hat{L}_P(\omega) = \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{g_1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\sqrt{g} \omega^2}{g_2 v_A^2},$$

— оператор полоидальной моды,  $\omega$  и  $m$  — параметры преобразования Фурье по времени (частота) и по азимутальному углу (азимутальное волновое число),

$$\tilde{q}_{m\omega} = -2m\omega \sqrt{g} \frac{en_0 \Omega}{c^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(t') \exp(i\omega t' - im\Omega t') dt'.$$

Зная решение уравнения (1.95), мы можем найти решение волнового уравнения (1.94), проделав обратное преобразование Фурье:

$$\Phi(x^1, x^2, x^3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dm \Phi_{m\omega} \exp(im\varphi - i\omega t). \quad (1.96)$$

Функцию  $\Phi_{m\omega}$  можно представить в виде

$$\Phi_{m\omega} \approx R_N(x^1) T_N(x^1, x^3), \quad (1.97)$$

где  $T_N(x^1, x^3)$  — собственная функция тороидального оператора  $\hat{L}_T$ , определяющая продольную структуру  $N$ -й стоячей продольной гармоники, нормированная так, что

$$\left\langle \frac{\sqrt{g} T_N^2}{g_1 v_A^2} \right\rangle = 1,$$

(здесь треугольные скобки обозначают интегрирование вдоль силовой линии между магнитосопряженными точками ионосферы,  $\langle \dots \rangle = \int_{x_-^3}^{x_+^3} (\dots) dx^3$ ).

Функция  $R_N(x^1)$  определяет структуру этой гармоники поперек магнитных оболочек. При этом функция  $R_N(x^1)$  определяется из решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (x^1 - x_{TN}^1(\omega)) \frac{\partial}{\partial x^1} R_N - \frac{m^2}{L^2} (x^1 - x_{PN}^1(\omega)) R_N = mq(\omega, m) \quad (1.98)$$

[Leonovich and Mazur, 1997; Klimushkin et al., 2004], где

$$q(\omega, m) = \frac{q_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(t') \exp(i\omega t' - im\Omega t') dt',$$

$$q_0 = -\frac{el \Omega}{c^2 \Omega_0} \langle n_0 \sqrt{g} T_N \rangle. \quad (1.99)$$

При выводе этого уравнения было использовано линейное разложение собственных значений частоты тороидального и полоидального операторов в окрестности определенной магнитной оболочки на расстоянии  $L$  в плоскости экватора:

$$\Omega_{TN}(x^1) = \Omega_0 \left(1 - \frac{x^1}{l}\right),$$

— тороидальная частота,

$$\Omega_{PN}(x^1) = \Omega_0 \left(1 - \frac{x^1 + \Delta}{l}\right)$$

— полоидальная частота (функции  $\Omega_{TN}(x^1)$  и  $\Omega_{PN}(x^1)$  являются монотонно убывающими в большей части магнитосферы). Функции частоты  $x_{TN}^1(\omega)$  и  $x_{PN}^1(\omega)$  в (1.98) являются координатами магнитных поверхностей на которых частота волны равна тороидальной и полоидальной частоте, т. е.  $x_{TN}^1(\omega)$  и  $x_{PN}^1(\omega)$  являются решениями уравнений  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$  и  $\omega = \Omega_{PN}(x^1)$ :

$$\begin{aligned} x_{TN}^1(\omega) &= l \left(1 - \frac{\omega}{\Omega_0}\right), \\ x_{PN}^1(\omega) &= x_{TN}^1 - \Delta_N, \end{aligned} \quad (1.100)$$

где  $\Delta_N$  — расстояние между тороидальной и полоидальной поверхностями (в холодной плазме полоидальная поверхность всегда ближе к Земле, чем тороидальная).

Уравнение (1.98) имеет решение

$$R_N(x^1, \omega, m) = iq(\omega, m)L \int_0^{+\infty} \frac{d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + m^2 \frac{l^2}{L^2}}} \exp \left[ ik(\xi - \xi_T(\omega)) + im\delta \frac{l}{L} \arctan \frac{\kappa L}{ml} \right]. \quad (1.101)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi = x^1/l, \quad \xi_T = x_{TN}^1/l, \quad \xi_P = x_{PN}^1/l, \quad \delta = \Delta_N/l.$$

Таким образом решение исходного волнового уравнения (1.94) согласно выражениям (1.96, 1.97) есть

$$\Phi(x^1, x^2, x^3, t) = \mathcal{R}_N(x^1, x^2, t) T_N(x^1, x^3), \quad (1.102)$$

где

$$\mathcal{R}_N(x^1, x^2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dm R_N(m, \omega) \exp(im\varphi - i\omega t) \quad (1.103)$$

– функция, определяющая поперечную структуру и эволюцию волны. Выражение для  $\mathcal{R}_N$  с учетом выражений (1.100, 1.101) приводится к виду:

$$\mathcal{R}_N = iq_0 L \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_0^{+\infty} d\kappa \frac{\exp[i\Psi(m, \kappa)]}{\sqrt{\kappa^2 + m^2 \frac{l^2}{L^2}}}, \quad (1.104)$$

где

$$\Psi(m, \kappa) = m(\varphi - \Omega t) + \kappa \left( \xi - 1 + \frac{m\Omega}{\Omega_0} \right) + m\delta \frac{l}{L} \arctan \frac{\kappa L}{ml}. \quad (1.105)$$

Выражение (1.104) выводится следующим образом. Запишем выражение (1.103) используя выражения (1.100), (1.101) и выражение для  $q(\omega, m)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_N = & \frac{iq_0 L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_0^{+\infty} d\kappa \frac{\exp \left[ im\varphi + ik(\xi - 1) + im\delta \frac{l}{L} \arctan \frac{\kappa L}{ml} \right]}{\sqrt{\kappa^2 + m^2 \frac{l^2}{L^2}}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \Theta(t') \exp[-im\Omega t'] \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp[i\omega(t - t' + \kappa/\Omega_0)]. \end{aligned}$$

Два последних интеграла в этом выражении преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \dots &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \Theta(t') \exp[-im\Omega t'] \delta(t' - t + \kappa/\Omega_0) = \\ &= 2\pi \Theta(t - \kappa/\Omega_0) \exp \left[ -im\Omega t + \kappa \frac{m\Omega}{\Omega_0} \right]. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\mathcal{R}_N = iq_0 L \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_0^{\Omega_0 t} d\kappa \frac{\exp \left[ m(\varphi - \Omega t) + \kappa \left( \xi - 1 + \frac{m\Omega}{\Omega_0} \right) + im\delta \frac{l}{L} \arctan \frac{\kappa L}{ml} \right]}{\sqrt{\kappa^2 + m^2 \frac{l^2}{L^2}}}.$$

Это выражение приводится к формуле (1.104) при  $\Omega_0 t \rightarrow \infty$  (верхний предел в интеграле по  $\kappa$ ).

Выражение (1.104) справедливо для установившихся колебаний, когда  $\Omega_0 t \gg 1$ , т. е. по истечении многих периодов после момента инжекции частиц в магнитосферу.

**Асимптотическое решение.** В нашей работе мы будем рассматривать источник движущийся со скоростью, намного меньшей альфвеновской скорости. В этом случае для вычисления двойного интеграла (1.104) воспользуемся методом стационарной фазы, считая большим параметром  $\mu = \Omega_0/\Omega$ . Найдем точку стационарной фазы  $(m_0, \kappa_0)$  из условий

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} \right|_{m_0, \kappa_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial m} \right|_{m_0, \kappa_0} = 0.$$

В результате имеем два уравнения, определяющие точку стационарной фазы:

$$m_0 + (\xi - 1)\mu + \mu\delta \left[ 1 + \left( \frac{\kappa_0 L}{m_0 l} \right)^2 \right]^{-1} = 0, \quad (1.106)$$

$$\kappa_0 + \mu(\varphi - \Omega t) + \mu\delta \frac{l}{L} \arctan \frac{\kappa_0 L}{m_0 l} + \mu\delta \frac{\kappa_0}{m_0} \left[ 1 + \left( \frac{\kappa_0 L}{m_0 l} \right)^2 \right]^{-1} = 0 \quad (1.107)$$

Из уравнения (1.106) находим соотношение связывающее  $\kappa_0$  и  $m_0$ :

$$\kappa_0^2 = m_0^2 \frac{l^2}{L^2} \frac{m_0 \Omega - \Omega_{PN}(\xi)}{\Omega_{TN}(\xi) - m_0 \Omega}, \quad (1.108)$$

где

$$\Omega_{TN}(\xi) = \Omega_0(1 - \xi), \quad \Omega_{PN}(\xi) = \Omega_0(1 - \xi - \delta).$$

Далее из уравнения (1.107) находим  $\kappa_0$ :

$$\kappa_0 = \mu(\Omega t - \varphi) \quad (1.109)$$

В уравнении (1.107) мы не учитывали два последних слагаемых, т.к. они пропорциональны малому параметру  $\delta = \Delta_N/l \ll 1$  (в холодной плазме расстояние  $\Delta_N$  между тороидальной и полоидальной поверхностями мало по сравнению с масштабом магнитосферы) и ограничены при  $|\kappa_0| \rightarrow \infty$  и  $m_0 \rightarrow \infty$ . Таким образом, данное приближение справедливо при  $|\varphi - \Omega t| \gg \delta$ , т.е. на расстоянии от источника много большем  $\Delta_N$ . Далее из (1.108) и (1.109) получаем уравнение определяющее  $m_0$ :

$$\mu^2(\Omega t - \varphi)^2 = m_0^2 \frac{l^2}{L^2} \frac{m_0 \Omega - \Omega_{PN}(\xi)}{\Omega_{TN}(\xi) - m_0 \Omega}. \quad (1.110)$$

Рассмотрим два предельных случая:

1) при приближении к источнику, когда  $(\Omega t - \varphi) \rightarrow 0$ ,

$$m_0 \rightarrow m_P = \frac{\Omega_{PN}}{\Omega};$$

2) при удалении от источника, когда  $|\Omega t - \varphi| \rightarrow \infty$ ,

$$m_0 \rightarrow m_T = \frac{\Omega_{TN}}{\Omega}.$$

Таким образом  $m_0$  изменяется в относительно узком интервале шириной  $\mu\delta$ , от значения  $m_P$ , вблизи источника, до значения  $m_T$ , при удалении от источника на большое расстояние или по истечении бесконечно большого времени после его прохождения. Воспользовавшись этим фактом, представим  $m_0$  в виде разложения

$$m_0 = m_T + m'\delta.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.110), и пренебрегая слагаемыми пропорциональными  $\delta^2$  и  $\delta^3$  находим  $m'$ . В результате получаем выражение для  $m_0$ :

$$m_0 = m_T - \mu\delta \left[ 1 + \frac{\mu^2 L^2}{m_T^2 l^2} (\Omega t - \varphi)^2 \right]^{-1}. \quad (1.111)$$

В окрестности точки стационарной фазы  $(m_0, \kappa_0)$  справедливо разложение фазы (1.105):

$$\Psi(\kappa, m) = \Psi(\kappa_0, m_0) + \frac{1}{2}A(\kappa - \kappa_0)^2 + \frac{1}{2}B(m - m_0)^2 + C(\kappa - \kappa_0)(m - m_0), \quad (1.112)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \kappa^2} \right|_{m_0, \kappa_0} = -\kappa_0^{-1} U, \\ B &= \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial m^2} \right|_{m_0, \kappa_0} = -\kappa_0^{-1} U \left( \frac{\kappa_0}{m_0} \right)^2, \\ C &= \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \kappa \partial m} \right|_{m_0, \kappa_0} = \mu^{-1} + m_0^{-1} U, \\ U &= 2\delta \left( \frac{\kappa_0 L}{m_0 l} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{\kappa_0 L}{m_0 l} \right)^2 \right]^{-2}. \end{aligned}$$

Величина  $U$  входящая в это выражение пропорциональны малому параметру  $\delta$  и ограничена, величины  $m_0$  и  $\kappa_0$  пропорциональны большому параметру  $\mu$ , следова-

тельно  $A$  и  $B$  пропорциональны  $\delta/\mu$ , а величина  $C \simeq 1/\mu$ . В результате разложение фазы (1.112) запишется в виде

$$\Psi(\kappa, m) = \Psi(\kappa_0, m_0) + \mu^{-1}(\kappa - \kappa_0)(m - m_0). \quad (1.113)$$

Далее, следуя методу стационарной фазы, выражение (1.104) для  $\mathcal{R}_N$  приводится к виду

$$\mathcal{R}_N = \frac{i q_0 L \exp[i\Psi(\kappa_0, m_0)]}{\sqrt{\kappa_0^2 + m_0^2 \frac{l^2}{L^2}}} \int_0^{+\infty} d\kappa \int_{-\infty}^{+\infty} dm \exp[i\mu^{-1}(\kappa - \kappa_0)(m - m_0)].$$

После вычислений интегралов в этом выражении окончательно получаем приближенное выражение для  $\mathcal{R}_N$ :

$$\mathcal{R}_N = \mathcal{A}_0 e^{i\Psi_0} \quad (1.114)$$

где

$$\Psi_0 \equiv \Psi(\kappa_0, m_0) = (\mu\varphi - \Omega_0 t)(1 - \xi) + m_0 \delta \frac{l}{L} \arctan \frac{(\Omega t - \varphi)\mu L}{m_0 l} \quad (1.115)$$

– фаза волны,

$$\mathcal{A}_0 = i 2\pi q_0 L \left[ (\Omega t - \varphi)^2 + \frac{m_0^2 l^2}{\mu^2 L^2} \right]^{-1/2} \Theta(\Omega t - \varphi) \quad (1.116)$$

– амплитуда волны. Так как в выражении (1.116) стоит  $\Theta(\Omega t - \varphi)$ , то в данном приближении перед источником волновое поле отсутствует.

Из выражения для фазы (1.115) нетрудно определить частоту волны, длину волны по азимуту и в радиальном направлении. Значения этих величин приближенно определяются выражениями:

$$\omega = \Omega_{TN} - \Omega_0 \delta \left[ 1 + \frac{\mu^2 L^2}{m_0^2 l^2} (\Omega t - \varphi)^2 \right]^{-1} \quad (1.117)$$

– циклическая частота волны,

$$\lambda_\varphi = \frac{2\pi}{k_\varphi} = \frac{2\pi L}{m_0}, \quad k_\varphi = \frac{m_0}{L}, \quad (1.118)$$

– азимутальная длина волны и азимутальная проекция волнового вектора,

$$\lambda_r = \frac{2\pi}{k_r} = \frac{2\pi l}{\mu(\Omega t - \varphi)}, \quad k_r = \frac{\kappa_0}{l} \quad (1.119)$$

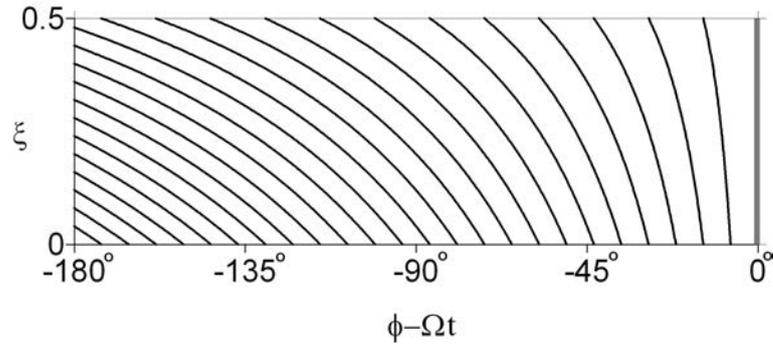


Рисунок 33. Линии постоянной фазы. Здесь линии соответствуют значениям фазы кратным  $2\pi$ , источник движется слева на право, положению источника соответствует  $\varphi - \Omega t = 0$ ,  $\xi = x^1/l$  — обезразмеренная радиальная координата.

— радиальная длина волны и радиальная проекция волнового вектора. Таким образом, частота и азимутальная длина волны зависят от радиальной координаты  $x^1$ . Эти величины также зависят от времени: по мере удаления источника  $\omega$  изменяется от  $\Omega_{PN}$  до  $\Omega_{TN}$ , а  $\lambda_\varphi$  от  $2\pi L/m_P$  до  $2\pi L/m_T$ . Однако эта зависимость очень слабая, т.к. в холодной плазме  $\Omega_{PN} \approx \Omega_{TN}$ .

Что гораздо важнее, радиальная компонента волнового вектора сильно зависит от времени. При  $\Omega t - \varphi \simeq 0$  эта величина очень мала,  $k_r \ll k_\varphi$ . Радиальная компонента увеличивается по мере удаления источника от заданной точки по азимутальной координате (рис. 33),  $k_r \rightarrow \infty$  при  $\Omega t - \varphi \rightarrow \infty$ . Но через соотношение между  $k_r$  и  $k_\varphi$  выражается поляризация волны:  $|E_\varphi/E_r| = k_\varphi/k_r$ . Таким образом, сразу после рождения волна является полоидально-поляризованной ( $E_r \ll E_\varphi$ ), но с течением времени она меняет свою поляризацию, трансформируясь в тороидальную ( $E_r \gg E_\varphi$ ). При удалении от источника азимутальная компонента вектора напряженности электрического поля  $E_\varphi$  уменьшается как  $(\Omega t - \varphi)^{-1}$ , а радиальная  $E_r$  напротив стремится к постоянной величине, так что амплитуда осцилляций напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  волны остается всегда постоянной. Характерное время трансформации составляет

$$\tau = \frac{m_0 l}{\omega L} \sim m_0 \omega^{-1} = \Omega^{-1}, \quad (1.120)$$

что соответствует удалению от источника на достаточно большое угловое расстояние  $\phi = \Omega\tau \sim 1$ . Аналогичная трансформация волны из полоидальной в торoidalную имеет место и в случае импульсного возбуждения альфвеновской волны, причем с таким же характерным временем трансформации  $\tau \sim m/\omega$  ( $m$  — азимутальное волновое число).

**Амплитуда волны.** Оценим амплитуду генерируемой волны. Исходя из выражений (1.99), (1.102) и (1.116) имеем, что

$$\Phi \sim \frac{2\pi eL^2}{c^2\mu} \langle n_0\sqrt{g}T_N \rangle T_N \sim \frac{2\pi en_0L^2v_A^2}{c^2\mu},$$

здесь использовано условие нормировки  $T_N$ , из которого следует, что  $T_N \sim v_A/L$  и  $\langle n_0\sqrt{g}T_N \rangle \sim n_0v_AL$ . Далее находим напряженность электрического поля волны

$$E \sim \frac{\mu}{L}\Phi \sim \frac{2\pi en_0Lv_A^2}{c^2}, \quad (1.121)$$

а следовательно и магнитное поле волны

$$b \sim \frac{c}{v_A}E \sim \frac{2\pi en_0Lv_A}{c}. \quad (1.122)$$

Пользуясь выражением (1.122) найдем концентрацию протонов  $n_0$  в дрейфующем облаке, необходимую для генерации альфвеновских колебаний в магнитосфере с наблюдаемыми значениями амплитуды магнитного поля  $b$ :

$$n_0 \sim \frac{bc}{2\pi eLv_A}.$$

Амплитуда азимутально-мелкомасштабных колебаний в магнитосфере достигает значений  $b \sim 40 \cdot 10^{-5}$  Гс, их периоды порядка 100 с, азимутальные волновые числа  $m \sim 20 - 100$ , наиболее часто они наблюдаются в окрестности магнитной оболочки с радиальной координатой  $\sim 6$  радиусов Земли. Характерное значение альфвеновской скорости  $v_A \sim 1000$  км/с. Для генерации альфвеновских волн с такими свойствами необходима концентрация протонов в дрейфующем облаке  $n_0 \sim 10^{-2}$  см $^{-3}$ , что намного меньше концентрации частиц фоновой (холодной) плазмы; энергия частиц (протонов)  $\epsilon$ , определяющая скорость дрейфа протонов в неоднородном магнитном поле (скорость источника  $\Omega$ ), должна составлять около

50 кэВ (волна генерируется с  $m \sim \omega/\Omega$ ). Действительно, как было установлено в работах [Baddeley et al., 2002, 2004, 2005b; Wilson et al., 2006] одновременно с азимутально-мелкомасштабными колебаниями в магнитосфере часто наблюдаются частицы, имеющие функции распределения с инверсными участками, приходящими на энергии порядка 50 кэВ.

#### 1.4.2 Движение фазы в сторону экватора при наблюдениях полоидальных альфвеновских волн на радарх

При радарных наблюдениях полоидальные волны с большими  $m$  показывают западное по азимуту и экваториальное по широте распространение фазы [Tian et al., 1991; Yeoman et al., 1992]. Западное распространение фазы объясняется тем, что волны генерируются энергичными протонами, скорости дрейфа которых направлены на запад. Труднее обстоят дела с экваториальным направлением. Традиционная теория альфвеновских волн в магнитосфере предсказывает, что распространение фазы должно быть экваториальным.

Например, представим себе, что волна возбуждена внезапным импульсом с азимутальной структурой в виде  $e^{im\varphi}$ . Поскольку каждая силовая линия колеблется со своей собственной частотой, структура волнового поля дается выражением

$$E = |E|e^{i\Psi} \quad (1.123)$$

где фаза волны

$$\Psi = -\omega(x)t + m\varphi, \quad (1.124)$$

и  $\Omega(x)$  — резонансная частота на радиальной координате  $x$ . В данном случае различие между полоидальной и тороидальной частотами не представляет особой важности, поскольку они близки друг к другу. Азимутальное волновое число  $m$  определяется структурой импульса по азимутальной координате. Радиальная компонента волнового вектора — это производная фазы по радиальной координате, т.е.

$$k_x \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{d\omega(x)}{dx}t.$$

Но поскольку собственная частота (за пределами внутренней кромки плазмопаузы) убывает с расстоянием, величина  $k_x$  должна быть положительной, что в проекции на ионосферу означает распространение фазы в сторону полюса. Именно такое поведение характерно для тороидальных пульсаций с малыми  $m$ . Высказывалось предположение, что все наблюдаемые на радарх волны генерируются в той единственной области, где собственная частота альфвеновских волн растет с расстоянием, т.е. на внутренней кромке плазмопаузы [Tian et al., 1991]. Дальнейшие наблюдения, однако, не подтвердили это предположение.

Здесь мы покажем, что экваториальное распространение фазы получает естественное объяснение в теории движущегося источника, достаточно допустить только, что частицы распределены по энергии таким образом, что их угловая дрейфовая скорость растет с увеличением расстояния от Земли. Хотя до сих пор такая теория не была детально разработана, ее основные черты можно уяснить исходя из довольно простых полукачественных соображений.

Пусть источник является азимутально-движущейся неоднородностью плазмы. Такой источник можно считать тем же внезапным импульсом, но распространяющимся по азимуту с дрейфовой угловой скоростью  $\omega_d(x)$ . Учитывая тот факт, что энергия альфвеновских волн практически не распространяется поперек магнитных оболочек, уравнение (1.123) нужно заменить на уравнение

$$E = \Theta(\omega_d t - \varphi) |E| e^{i\Psi}. \quad (1.125)$$

Здесь  $\Theta(\omega_d t - \varphi)$  — ступенчатая функция Хевисайда. Фаза волны по прежнему дается выражением (1.124), но  $m$  уже не является произвольным. В системе отсчета движущегося источника фаза волны прямо за источником должна быть постоянной величиной, поэтому из-за эффекта Доплера частота  $\omega' = \omega - m\omega_d$  должна быть равна нулю. Следовательно, азимутальное волновое число определяется выражением

$$m = \frac{\omega(x)}{\omega_d(x)}. \quad (1.126)$$

Эта величина зависит от радиальной координаты (попросту говоря, волны с различными  $m$  будут резонировать с источником при разных  $x$ ). Окончательно полу-

чаем следующее выражение для фазы:

$$\Psi = -\omega(x)t + \frac{\omega(x)}{\omega_d(x)}\varphi. \quad (1.127)$$

Отсюда радиальная компонента волнового вектора

$$k_x = -\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right)'(\omega_d t - \varphi) - \omega t \frac{\omega_d'}{\omega_d} \quad (1.128)$$

(штрих означает производную по радиальной координате).

Пусть дрейфовая скорость  $\omega_d(x)$  растет с радиальной координатой,  $d\omega_d/dx > 0$  (такая ситуация возможна при условии значительных потерь инжектированных протонов [Southwood, 1980]). Тогда первое слагаемое в правой части (1.128) положительное, второе отрицательное, и очевидно, что сразу после момента прохождения источника ( $t_0 = \varphi/\omega_d$ ) радиальная компонента волнового вектора в точке с данной азимутальной координатой отрицательна:  $k_x < 0$ . В проекции на ионосферу это означает экваториальное распространение фазы. Однако в момент времени

$$t = \varphi \frac{(\omega/\omega_d)'}{\omega'}$$

величина  $k_x$  меняет свой знак и становится положительной.

Такому поведению можно дать следующую интерпретацию. Нарисуем линии постоянной фазы на плоскости  $x-\varphi$  (рис. 34). Вся эта картина сдвигается в правую сторону. Сразу рядом с источником линии постоянной фазы идут параллельно источнику. Благодаря увеличению скорости дрейфа с расстоянием линии постоянной фазы направлены под острым углом к линиям  $x = const$  (угол измеряется против часовой стрелки), что ведет к экваториальному направлению фазы и отрицательной величине  $k_x$ . Вблизи источника волну можно считать плоской (линии постоянной фазы идут почти параллельно друг другу), следовательно, разность фаз между двумя точками с одинаковыми координатами  $\varphi$  определяется как  $\Delta\Psi \simeq k_x(x_2 - x_1)$ . Если  $x_2 > x_1$ , то эта разность отрицательна. Но через некоторое время каждая силовая линия начинает осциллировать со своей собственной частотой, убывающей с расстоянием, что приводит к разбеганию по фазам. Благодаря этому разность фаз становится равной  $\Delta\Psi \simeq k_x(x_2 - x_1) - (\Omega(x_2) - \omega(x_1))t$ . Здесь  $\omega(x_2) < \omega(x_1)$ ,

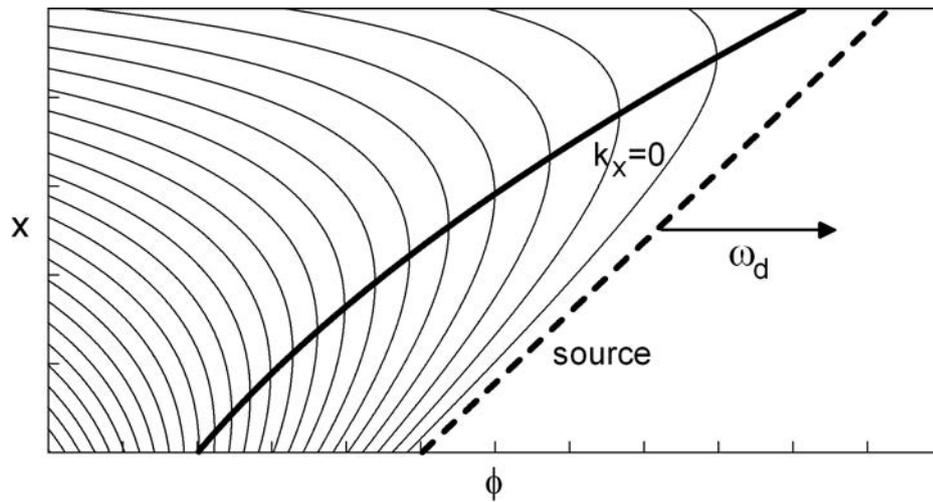


Рисунок 34. Линии постоянной фазы волны, образованные движущимся источником (скорость дрейфа растет с расстоянием). Пунктирная линия обозначает движущийся источник, положительный угол  $\phi$  — направление дрейфа (в случае протонов — на запад). Жирная линия соответствует  $k_x = 0$  (чисто полоидальная поляризация волны). Ниже этой линии фазовая скорость направлена к Земле, выше — от Земли

поэтому величина  $\Delta\Psi$  убывает со временем, и в некоторый момент меняет свой знак.

**Заключение.** В общих чертах картина генерации альфвеновской волны, обусловленная движением неоднородности плазмы (азимутальный дрейф облака энергичных частиц), следующая. В данной точке по азимутальной координате волна появляется сразу после прохождения облака. При этом направление ее распространения совпадает с направлением движения источника, поляризация является полоидальной. По мере того как источник удаляется от заданной точки, волна постепенно трансформируется в тороидальную. При реалистичных предположениях о концентрации и энергии частиц амплитуды генерируемых волн близки к наблюдаемым.

Изученный механизм позволяет объяснить особенности азимутально-мелкомасштабных волн в магнитосфере:

(1) Азимутальное волновое число  $m$  полностью определяется собственной частотой продольной гармоники  $\omega \sim \Omega_{PN}(x^1)$  и скоростью движения источника  $\Omega$ ,

$m \sim \omega/\Omega$ . Это объясняет то, что наблюдаемые волны имеют четко определенные значения азимутальных волновых чисел  $m$ .

(2) В соответствии с наблюдениями, фазовая скорость полоидальных альфвеновских волн совпадает с направлением дрейфа протонов.

(3) Несмотря на трансформацию в тороидальную волну, в данной точке по азимуту волна остается полоидальной в течении достаточно большого промежутка времени  $\tau \sim m/\omega$ . Это соответствует достаточно большому угловому расстоянию от источника  $\phi = \Omega\tau \sim 1$ . Кроме того, в некотором смысле слова волна всегда остается полоидальной, поскольку источник продолжает двигаться в азимутальном направлении, генерируя полоидальную волну все в новых и новых точках пространства. Если учесть затухание волны (например, за счет конечной проводимости ионосферы) то волна просто не успеет трансформироваться в тороидальную, и максимальная амплитуда волны будет соответствовать полоидальной поляризации.

Предложенный механизм можно приложить к объяснению ряда наблюдательных данных о полоидальных волнах типов Pc4-5. Так, в работе [Zolotukhina et al., 2008] было детально изучено временное поведение магнитного поля волны Pc5, появившейся в точке геостационарной орбиты в тот момент, когда туда прибыли частицы, инжектированные во время суббури. Было показано, что это поведение согласуется с теорией. В обширном статистическом исследовании [James et al., 2013] было установлено, что волна каждый раз возникала в тот момент, когда в данную точку прибывали частицы, при этом волны, наблюдаемые к западу или востоку от онсета суббури, распространялись, соответственно, на запад или восток, то есть убегали от точки онсета. Это согласуется с тем, что эти волны генерировались, соответственно, протонами или электронами, инжектированными во время суббури. В работе [Моисеев и др., 2020] по наземным наблюдениям (геомагнитным и риометрическим) обнаружено азимутальное распространение пульсаций типа Pi3 со скоростями, соответствующим скоростям распространения суббуревых инъекций электронов. Наконец, предложенный механизм дает естественное объяснение

экваториальному распространению фазы полоидальных волн с  $m \gg 1$ , регулярно наблюдающемуся с помощью радаров: достаточно только допустить, что дрейфовая скорость инжектированных частиц растет с расстоянием.

## 1.5 Выводы к Главе 1

Перечислим основные результаты, полученные в данной главе.

1. Рассмотрена пространственно-временная структура волнового поля в присутствии неустойчивости, связанной с резонансной передачей энергии от высокоэнергичных частиц альфвеновской волне. Изучены два случая: (1) монохроматическая волна (источник — дельта-функция от частоты) и (2) импульсно-генерированная волна (источник — дельта-функция от времени). Учтена кривизна силовых линий и конечное плазменное давление. Инкремент неустойчивости максимален для полоидально-поляризованных волн и равен нулю для волн с тороидальной поляризацией. Тем не менее, установлено, что в обоих случаях неустойчивость в конечном итоге порождает тороидальную волну. Это связано с трансформацией волны из полоидальной в тороидальную, вызванную в первом случае поляризационным расщеплением спектра (в конечном итоге кривизной силовых линий) и разбеганием по фазам во втором случае. Высказано предположение, что полоидальные альфвеновские волны все же могут возбуждаться неустойчивостями, если их основная часть представляет собой собственные моды (или суперпозиции собственных мод) резонатора поперек магнитных оболочек, существование которого было предсказано в работах [Vetoulis and Chen, 1994; Leonovich and Mazur, 1995b; Klimushkin, 1998a].

2. Рассмотрена пространственно-временная структура альфвеновских волн, генерированных импульсными источниками более сложного вида: (1) импульс конечной длительности, широко распределенный поперек L-оболочек, и (2) резкий импульс, сконцентрированный на одной L-оболочке.

Первая задача имеет большое значение для изучения установления структуры монохроматической альфвеновской волны. Установлено, что эволюция волнового

поля делится на несколько фаз. На первой фазе (сразу после включения источника) эволюция волны определяется явлением разбегания по фазам. При этом вблизи полоидальной поверхности формируется волновой фронт, движущийся с групповой скоростью поперек магнитных оболочек по направлению к тороидальной поверхности. Наличие поперечной групповой скорости альфвеновской волны связано с поляризационным расщеплением спектра. При прохождении фронта через некоторую точку амплитуда волны резко повышается. В тех точках, куда фронт еще не дошел, происходит эволюция волнового поля, определяемая разбеганием по фазам. После прохождения волнового фронта в данной точке формируется практически установившаяся монохроматическая волна. При выключении источника формируется новый волновой фронт, который как бы уносит с собой структуру, характерную для монохроматической волны. После прохождения второго волнового фронта амплитуда волны резко уменьшается, а эволюция волнового поля снова начинает определяться разбеганием по фазам.

Вторая задача имеет отношение к генерации альфвеновских волн импульсом давления солнечного ветра, который эквивалентен импульсу поверхностного тока Чепмена-Ферраро, текущего по магнитопаузе. Непосредственно после импульса в магнитном поле волны присутствуют как полоидальные, так и тороидальные компоненты. Амплитуда волны экспоненциально уменьшается с расстоянием от источника. Полоидальная составляющая колеблется в режиме биения. Из-за разбегания по фазам ее амплитуда уменьшается со временем, но растет амплитуда тороидальной компоненты. В тороидальной составляющей биение выражено менее заметно. Общая энергия, интегрированная по всему объему плазмы, сохраняется. По прошествии времени волновое поле разделяется на тонкое ядро и широкий хвост колебания: плотность энергии вблизи магнитной оболочки источника растет, в то время как вдали от источника она значительно уменьшается, наконец достигая некоторого небольшого постоянного значения. Таким образом, на поверхности источника постепенно «вызревает» волна Альфвена с частотой, равной локальной альфвеновской частоте на этой поверхности. В хвосте волнового поля каждая си-

ловая линия колеблется с локальной альфвеновской частотой на своей магнитной оболочке.

3. Изучена генерация альфвеновской волны движущимся облаком плазмы. Такие облака могут возникать при суббуревых инъекциях заряженных частиц. Установлено, что волна появляется в данной точке сразу после прохождения облака. Направление ее распространения по азимуту совпадает с направлением движения источника. Сразу после прохождения облака поляризация волны является полоидальной. По мере удаления источника от заданной точки волна постепенно трансформируется в тороидальную. Азимутальное волновое число  $m$  определяется из соотношения  $m = \Omega/\omega_d$ , где  $\Omega$  — собственная альфвеновская частота на данной L-оболочке, которая медленно меняется от полоидальной до тороидальной собственной частоты (различие между ними вызвано поляризационным расщеплением спектра). Это соотношение напоминает условие дрейфового резонанса при обмене энергии между волнами и частицами, но имеет совершенно другой физический смысл. При реалистичных предположениях о концентрации и энергии частиц амплитуды генерируемых волн близки к наблюдаемым. Высказано предположение, что предложенный механизм можно приложить к объяснению ряда наблюдательных данных о полоидальных волнах типов Pc4-5.

Основное содержание этой главы основано на публикациях из списка в разделе «Общая характеристика работы»: [2, 6, 7, 11, 12, 14, 17].

## Глава 2

# Сцепление альфвеновской и компрессионной мод: гидродинамическое рассмотрение

Как известно, в горячей замагниченной плазме существует три моды МГД-колебаний: альфвеновская, быстрый магнитный звук (БМЗ) и медленный магнитный звук (ММЗ). Две последние моды часто называются компрессионными, поскольку сопровождаются значительными изменениями не только направления, но и величины магнитного поля волны. В однородной плазме эти колебания распространяются независимо. Однако в неоднородной плазме эти моды, как говорят, сцеплены [Alperovich and Fedorov, 2007; Леонович и Мазур, 2016]. Примеры сцепления различных МГД-мод были во Введении. В первую очередь, это альфвеновский резонанс, который играет важную роль при сравнительно небольших значениях азимутального волнового числа,  $m \sim 1$  [Chen and Hasegawa, 1974; Southwood, 1974], а также сцепление альфвеновских волн и ММЗ, имеющее большое значение для азимутально-мелкомасштабных колебаний ( $m \gg 1$ ) [Southwood and Saunders, 1985; Walker, 1987].

Данная глава посвящена изучению сцепления МГД-мод при различных условиях. Используется криволинейная ортогональная система координат  $\{x^1, x^2, x^3\}$ , привязанная к силовым линиям (см. раздел 1.2.1).

## **2.1 Сцепление альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн в плазме с тяжелыми ионами**

Результатом сцепления альфвеновской моды и БМЗ является альфвеновский резонанс. Это явление заключается в том, что БМЗ, генерированный при взаимодействии с солнечным ветром вблизи магнитопаузы, распространяется внутрь магнитосферы и отражается доходя до некоторой предельной магнитной оболочки; однако часть энергии БМЗ просачивается внутрь магнитосферы и доходит до резонансной поверхности, определяемой как магнитная оболочка, где частота колебаний равна собственной частоте альфвеновской волны. Вблизи резонансной поверхности возбуждается тороидально-поляризованная альфвеновская волна. Существование альфвеновского резонанса в магнитосфере Земли подтверждается многочисленными экспериментальными данными, полученными с помощью наземных магнитометров [Saka et al., 1983; Samson et al., 1991], радаров [Yeoman et al., 1997], спутников [Agaritov et al., 2009], оптических камер [Samson et al., 1996].

Помимо магнитосферы Земли, УНЧ-волны наблюдались и в магнитосферах других планет Солнечной системы. В частности, в 1989 году при анализе данных с космического аппарата «Маринер-10» были открыты волны в магнитосфере Меркурия [Russell, 1989]. Впоследствии УНЧ-волны вблизи Меркурия наблюдались и с помощью космического аппарата «Мессенджер» [Boardsen et al., 2012; Kim et al., 2015; James et al., 2019]. Особенностью меркурианской магнитосферы является ее маленький размер: магнитный момент планеты достаточно мал, плотность потока солнечного ветра на ее орбите очень велика. Благодаря этому магнитные силовые линии оказываются очень короткими, и собственные частоты альфвеновских колебаний — малыми. С другой стороны, наблюдения с КА «Маринер-10» и «Мессенджер» показали, что плазма меркурианской магнитосферы насыщена тяжелыми ионами (натрием и гелием) [Zurbuchen et al., 2011; Raines et al., 2015]. Ларморовские периоды этих ядер сопоставимы с собственными частотами альфвеновских колебаний. Следовательно, при теоретическом изучении колебаний меркурианской

магнитосферы в принципе необходимо учитывать тяжелые ионы [Glassmeier et al., 2004].

В частности, возникает вопрос, при каком условии в меркурианской магнитосфере возможно резонансное взаимодействие альфвеновских волн и быстрого магнитного звука. В работе [Othmer et al., 1999] был сделан вывод, что оно возникает при совпадении частоты волны с так называемой частотой кроссовера. Здесь мы произведем более полный анализ проблемы [Glassmeier et al., 2003].

В земной магнитосфере эффекты тяжелых ионов важны для микропульсаций типа Pc1,2, Pi1, особенно в ходе магнитных бурь, когда тяжелые ионы (в основном, ионы кислорода) поступают из ионосферы в магнитосферу.

### 2.1.1 Система волновых уравнений

Для изучения волн в магнитосфере Меркурия будет использоваться система координат  $(x^1, x^2, x^3)$ , ориентированная по магнитному полю (см. рис. 13). В холодной бесстолкновительной плазме система уравнений Максвелла приводится к виду

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega \vec{b}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{b} = -i \frac{\omega}{c^2} \hat{\varepsilon} \vec{E}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\vec{E}$  — электрическое и  $\vec{b}$  — магнитное поле волны,  $\omega$  — частота волны, тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -i\eta & 0 \\ i\eta & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

При этом считаются выполненными два других уравнения Максвелла  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  (при отсутствии объемных зарядов) и  $\nabla \cdot \vec{b} = 0$ .

Рассмотрим волны с частотами существенно ниже циклотронной частоты электронов  $\Omega_{ce}$ . Для таких волн тензор диэлектрической проницаемости принимает вид

(в пренебрежении током смещения)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\parallel} &= -\frac{\Omega_{pe}^2}{\omega^2}, \\ \varepsilon_{\perp} &= \frac{\Omega_{pH}^2}{\Omega_{cH}^2 - \omega^2} + \frac{\Omega_{pNa}^2}{\Omega_{cNa}^2 - \omega^2}, \\ \eta &= \frac{\Omega_{pe}^2}{\omega\Omega_{ce}} - \frac{\Omega_{cH}}{\omega} \frac{\Omega_{pH}^2}{\Omega_{cH}^2 - \omega^2} - \frac{\Omega_{cNa}}{\omega} \frac{\Omega_{pNa}^2}{\Omega_{cNa}^2 - \omega^2},\end{aligned}$$

где  $\Omega_p$  и  $\Omega_c$  — плазменная и циклотронные частоты, и второй индекс у частоты обозначает компоненты плазмы — электроны (e), протоны (H), и тяжелые ионы (Na).

Из уравнений (2.1, 2.2) получаем уравнение для электрического поля волны

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \vec{E}. \quad (2.4)$$

Уравнения (2.4) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных для трех компонент электрического поля волны  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — поперечные компоненты по отношению к фоновому магнитному полю, и  $E_3$  — продольная компонента. Произведя операцию дивергенции уравнения (2.2), мы получим формулу  $\nabla \cdot \hat{\varepsilon} \vec{E} = 0$ , которая эквивалентна уравнению непрерывности тока  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ . Рассматривая это соотношение покомпонентно, выражаем продольное электрическое поле через компоненты поперечного:

$$\partial_3 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \varepsilon_{\parallel} E_3 = -\partial_1 \frac{\sqrt{g}}{g_1} (\varepsilon_{\perp} E_1 - i\eta E_2) - \partial_2 \frac{\sqrt{g}}{g_2} (\varepsilon_{\perp} E_2 + i\eta E_1), \quad (2.5)$$

где обозначено  $\partial_i = \partial/\partial x^i$ . Отметим, что в аксиально-симметричной магнитосфере производные по азимутальной координате ( $x^2$ ) пропорциональны азимутальному волновому числу  $m$ :  $\partial_2 = im$ .

В частотном диапазоне  $\omega \sim \Omega_{cH}, \Omega_{cNa}$  компоненты диэлектрического тензора  $\hat{\varepsilon}$  удовлетворяют условию  $\varepsilon_{\parallel} \gg \varepsilon_{\perp}, \eta$ . Отсюда и из формулы (2.5) следует, что параллельное электрическое поле волны  $E_3$  существенно меньше поперечных компонент  $E_1$  and  $E_2$ . Таким образом, электрическое поле волны является практически двумерным, лежащим на поверхностях, ортогональным силовым линиям:

$\vec{E} = (E_1, E_2, 0)$ . Тогда уравнение (2.4) сводится к виду

$$(L^{ij} + P^{ij} + Q^{ij})E_j = 0, \quad (2.6)$$

где обозначено:

$$L^{ij} = \begin{pmatrix} \hat{L}_T & 0 \\ 0 & \hat{L}_P \end{pmatrix}, \quad P^{ij} = \begin{pmatrix} \partial_2 \frac{g_3}{\sqrt{g}} \partial_2 & -\partial_2 \frac{g_3}{\sqrt{g}} \partial_1 \\ -\partial_1 \frac{g_3}{\sqrt{g}} \partial_2 & \partial_1 \frac{g_3}{\sqrt{g}} \partial_1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{g_3} \frac{\omega^2}{c^2} \eta \\ i\sqrt{g_3} \frac{\omega^2}{c^2} \eta & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\hat{L}_T = \partial_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \partial_3 + \frac{\sqrt{g}}{g_1} \varepsilon_{\perp} \frac{\omega^2}{c^2},$$

$$\hat{L}_P = \partial_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \partial_3 + \frac{\sqrt{g}}{g_2} \varepsilon_{\perp} \frac{\omega^2}{c^2}.$$

В формуле (2.6) и ниже индексы  $i$  и  $j$  принимают значения 1 и 2, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Двумерное векторное поле  $\vec{E}$  может быть разбито на потенциальную и вихревую компоненты:

$$\vec{E} = -\nabla_{\perp} \Phi + \nabla_{\perp} \times \vec{e}_{\parallel} \Psi, \quad (2.7)$$

где  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{B}/B$  — единичный вектор вдоль направления равновесного магнитного поля,  $\nabla_{\perp}$  — двумерный оператор Гамильтона на поверхности  $(x^1, x^2)$ . В однородной плазме в МГД-приближении ( $\omega \ll \Omega_{c;i,e}$ ), «потенциалы»  $\Phi$  и  $\Psi$  описывают электрическое поле альфвеновской волны и быстрого магнитного звука, соответственно [Климушкин, 1994; Glassmeier, 1995; Fedorov et al., 1998; Itonaga et al., 2000].

Подставляя в (2.6) выражение (2.7) и действуя оператором  $\partial_i$ , получаем уравнение, связывающее «потенциалы»  $\Phi$  и  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \partial_1 \hat{L}_T \partial_1 + \partial_2 \hat{L}_P \partial_2 \right] \Phi - i \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \partial_1 \sqrt{g_3} \eta \partial_2 - \partial_2 \sqrt{g_3} \eta \partial_1 \right] \Phi = \\ & i \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \partial_1 \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \eta \partial_1 + \partial_2 \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \eta \partial_2 \right] \Psi + \left[ \partial_1 \hat{L}_T \frac{g_1}{\sqrt{g}} \partial_2 - \partial_2 \hat{L}_P \frac{g_2}{\sqrt{g}} \partial_1 \right] \Psi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для получения второго уравнения, связывающего «потенциалы»  $\Phi$  и  $\Psi$ , подействуем на (2.6) оператором  $-\epsilon^{kj}\partial_k g_{ij}/\sqrt{g}$ , где  $\epsilon^{kj}$  единичный антисимметричный псевдотензор,  $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ ,  $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \frac{g_3}{\sqrt{g}} \Delta_{\perp} \Psi &+ \left[ \partial_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \hat{L}_T \frac{g_2}{\sqrt{g}} \partial_1 + \partial_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \hat{L}_P \frac{g_1}{\sqrt{g}} \partial_2 \right] \Psi \\ &- i \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \partial_1 \frac{\eta}{\sqrt{g_3}} \partial_2 - \partial_2 \frac{\eta}{\sqrt{g_3}} \partial_1 \right] \Psi = \\ &- i \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \partial_1 \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \eta \partial_1 + \partial_2 \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \eta \partial_2 \right] \Phi \\ &+ \left[ \partial_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \hat{L}_T \partial_1 - \partial_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \hat{L}_P \partial_2 \right] \Phi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь

$$\Delta_{\perp} \equiv \partial_1 (g_2/\sqrt{g}) \partial_1 + \partial_2 (g_1/\sqrt{g}) \partial_2$$

— поперечный оператор Лапласа.

Система (2.8, 2.9) представляет собой систему сцепленных волновых уравнений для альфвеновской моды и БМЗ в неоднородной плазме с примесью тяжелых ионов. С ней мы и будем работать в дальнейшем.

### 2.1.2 Обсуждение системы сцепленных волновых уравнений

В МГД-приближении, т.е. в случае  $\omega \ll \Omega_{cH}, \Omega_{cNa}$ , компоненты тензора диэлектрической проницаемости приводятся к виду:

$$\varepsilon_{\perp} \rightarrow c^2/v_A^2, \quad \varepsilon_{\parallel} \rightarrow -\infty, \quad \eta \rightarrow 0, \quad (2.10)$$

где  $v_A = B/\sqrt{\mu_0(\rho_H + \rho_{Na})}$  — альфвеновская скорость,  $B$  — фоновое магнитное поле, и  $\rho_H$  и  $\rho_{Na}$  — массы ионов водорода и натрия, соответственно. В этом приближении из (2.8) и (2.9) получается система для сцепленных альфвеновской и БМЗ мод в земной магнитосфере из работы [Климушкин, 1994].

Как видно, система уравнений, описывающих УНЧ волны в магнитосфере Меркурия, имеет сходную структуру: существуют две моды, одна из которых,  $\Phi$ , распространяется вдоль магнитного поля, и вторая,  $\Psi$ , является изотропной. Эти моды являются аналогами альфвеновской и БМЗ мод в земной магнитосфере.

По сравнению с плазмой земной магнитосферы, плазма меркурианской магнитосферы имеет несколько важных отличий:

1) В магнитосфере Меркурия тензор диэлектрической проницаемости не приводится к виду (2.10), поскольку отношение  $\omega/\Omega_{cH}$  нельзя считать малым, а отношение  $\omega/\Omega_{cNa}$  является достаточно значительным. По этой причине УНЧ волны в магнитосфере Меркурия, строго говоря, нельзя называть гидромагнитными волнами.

2) В неоднородной плазме в системе волновых уравнений появляются несколько новых слагаемых, пропорциональных недиагональным компонентам метрического тензора  $\eta$ : вторые слагаемые в левых частях уравнений (2.8) и (2.9). Эти слагаемые пропорциональны азимутальному волновому числу  $m$  в первой степени. Отсюда следует, что волны с разными знаками  $m$  распространяются асимметрично.

3) Самое главное отличие вызывается первыми слагаемыми в правых частях уравнений (2.8) и (2.9), вносящих вклад в сцепление изотропной и направляемой мод. Эти слагаемые пропорциональны  $\eta$  и не исчезают при  $m = 0$ .

Рассмотрим случай  $m = 0$  подробнее. В этом случае уравнения (2.8) и (2.9) приводятся к виду

$$\left[ \partial_1 \hat{L}_T \partial_1 \right] \Phi - i \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \partial_1 \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} \eta \partial_1 \right] \Psi = 0, \quad (2.11)$$

$$\left[ \partial_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \hat{L}_T \frac{g_2}{\sqrt{g}} \partial_1 \right] \Psi + \Delta_{\perp} \frac{g_3}{\sqrt{g}} \Delta_{\perp} \Psi + i \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \partial_1 \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \eta \partial_1 \right] \Phi = 0. \quad (2.12)$$

Нетрудно видеть, что изотропная и направляемая моды не расцепляются из-за конечности величины  $\eta$ . Это сцепление не исчезает в однородной плазме, когда система (2.8) и (2.9) сводится к дисперсионному уравнению

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - k_{\parallel}^2 \right) \left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 \right) = \frac{\omega^4}{c^4} \eta^2. \quad (2.13)$$

Тот факт, что конечное отношение  $\omega/\Omega_c$  приводит к сцеплению направляемой и изотропной мод, хорошо известно в физике плазмы [Swanson, 1989]. В земной магнитосфере это сцепление было изучено в работах [Леонович и др., 1983b; Dmitrienko and Mazur, 1985, 1992]. Однако в земной магнитосфере это сцепление

важно только для пульсаций типа Pc1, в то время как на распространение волн типов Pc3-5 оно не оказывает заметного влияния.

В отличие от земной магнитосферы, в магнитосфере Меркурия отношение  $\omega/\Omega_{cH}$  лишь ненамного меньше единицы даже для главных гармоник УНЧ-волн, стоячих вдоль силовых линий. Следовательно, заметная примесь тонов натрия, для которых циклотронная частота может быть даже меньше частоты волны, приводит к тому, что для Меркурия сцепление направляемой и изотропной мод из-за недиагональных компонент тензора диэлектрической проницаемости может быть даже более важным, чем сцепление из-за неоднородности плазмы.

Для специального случая плазмы с прямыми силовыми линиями система волновых уравнений (2.11) и (2.12) сводится к виду

$$\frac{d}{dx} \hat{L}_T(\omega, x) \frac{d\Phi}{dx} = i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d}{dx} \eta \frac{d\Psi}{dx}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dx} \hat{L}_T(\omega, x) \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d^4}{dx^4} \Psi = -i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d}{dx} \eta \frac{d\Phi}{dx}, \quad (2.15)$$

где  $\hat{L}_T(\omega, x) = \omega^2/c^2 \epsilon(\omega, x) - k_{\parallel}^2$  и  $x$  — направление неоднородности плазмы. Точка  $x_s$ , в которой выполняется условие  $\hat{L}_T(\omega, x_s) = 0$ , является особой точкой уравнений. Было получено численное решение этой системы в окрестностях этой точки. Были заданы следующие параметры:  $B = 40$  нТл,  $\rho_H = 4,7 \cdot 10^{-21}$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{Na} = 3,3 \cdot 10^{-22}$  кг/м<sup>3</sup>,  $\omega = 3,2$  МГц. Радиальный масштаб неоднородности плазмы был задан равным 1/10 радиуса Меркурия. Результат показан на рисунке 35. Пространственная вариация компонентов электрического поля показывает сингулярное поведение решение в окрестностях точки  $x_s$ . Отличительной особенностью решения является осцилляторное поведение решения вблизи точки сингулярности. Это решение показывает, что в магнитосфере Меркурия резонансное сцепление мод может иметь место даже в случае аксиально-симметричных колебаний ( $m = 0$ .)

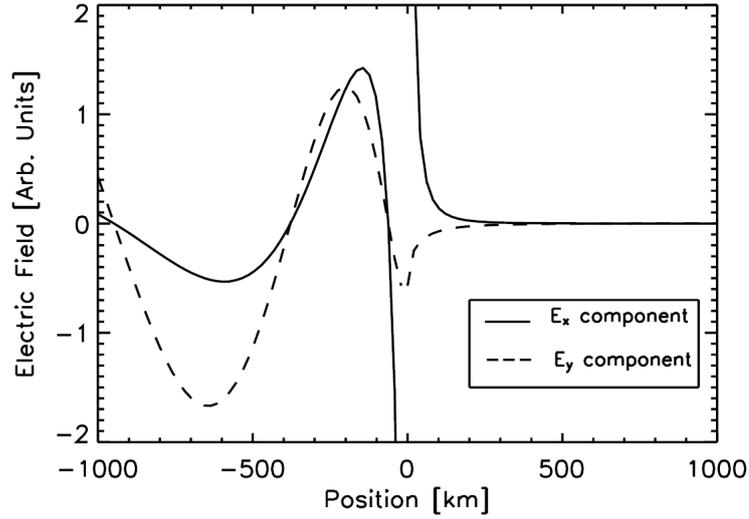


Рисунок 35. Поведение компонентов электрического поля вблизи особой точки  $x_s$ .

### 2.1.3 Осесимметричный альфвеновский резонанс в мультикомпонентной плазме при конечной гирочастоте ионов

Одномерно-неоднородная модель магнитосферы с прямыми силовыми линиями равновесного магнитного поля  $B$  (см. рис. 24) заслуживает более подробного рассмотрения. Рассмотрим систему координат, где ось  $x$  имитирует радиальную координату в магнитосфере, ось  $y$  – азимутальную, ось  $z$  направлена вдоль силовых линий. Все параметры плазмы меняются только поперёк магнитных оболочек. Давление плазмы считается нулевым. Плазма состоит из трёх компонент: электронов, лёгких ионов (протонов), тяжелых ионов (в меркурианской магнитосфере это ионы натрия, в земной это могут быть ионы кислорода).

В этой системе координат распишем уравнение (2.4) покомпонентно, предполагая, что зависимости возмущённых величин от координат  $y$  и  $z$  имеют вид  $e^{ik_y y + ik_z z}$  (величина  $k_y$  является аналогом азимутального волнового числа):

$$\frac{c^2}{\omega^2}(\varepsilon_{\perp} E_x - i\eta E_y) = ik_y \left( \frac{dE_y}{dx} - ik_y E_y \right) + k_z^2 E_x, \quad (2.16)$$

$$\frac{c^2}{\omega^2}(i\eta E_x + \varepsilon_{\perp} E_y) = \frac{d}{dx} \left( ik_y E_x - \frac{dE_y}{dx} \right) + k_z^2 E_y. \quad (2.17)$$

Выразим из (2.16)  $E_x$ :

$$E_x = \frac{1}{K - k_y^2} \left( ik_y E_y' + \frac{\omega^2}{c^2} i\eta E_y \right). \quad (2.18)$$

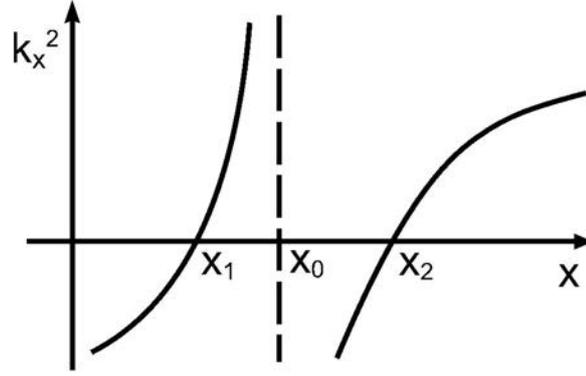


Рисунок 36. Квадрат азимутальной компоненты волнового вектора как функция радиальной координаты ( $k_x^2(x)$ ).

Здесь обозначено

$$K = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - k_z^2.$$

Подставляя (2.18) в (2.17), получаем уравнение для азимутальной компоненты электрического поля волны:

$$E_y'' - k_y^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon'_{\perp} E_y'}{K(K - k_y^2)} + \left[ K - k_y^2 - \frac{\omega^4 \eta^2}{c^4 K} - k_y \frac{\omega^4}{c^4} \frac{\eta \varepsilon'_{\perp}}{K(K - k_y^2)} + k_y \frac{\omega^4 \eta'}{c^2 K} \right] E_y = 0. \quad (2.19)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по радиальной координате. В однородной плазме это уравнение сводится к дисперсионному соотношению (2.13).

Ниже мы ограничимся рассмотрением осесимметричных колебаний ( $k_y = 0$ ), когда это уравнение сводится к виду

$$E_y'' + \left[ K - \frac{\omega^4 \eta^2}{c^4 K} \right] E_y = 0. \quad (2.20)$$

Именно с этим уравнением мы и будем работать в дальнейшем.

В качестве граничных условий мы будем использовать ограниченность функции  $E_y$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Решение уравнения (2.20) мы будем производить в ВКБ-приближении, считая большим параметром величину  $(\omega^2/c^2)\eta(K')^{-2/6}$ . Тогда квазиклассический волновой вектор (радиальная компонента) определяется из равенства

$$k_x^2 = K(x) - \frac{\omega^4 \eta^2(x)}{c^4 K(x)} \quad (2.21)$$

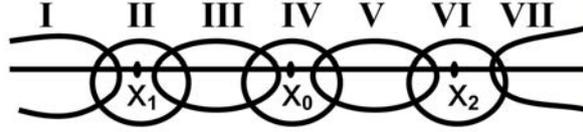


Рисунок 37. Области модели магнитосферы, где производится поиск решения и сращивание асимптотических разложений.

(рис. 36). Вблизи точек  $x_0 = 0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  ВКБ-приближение неприменимо, поскольку  $k_x$  обращается в бесконечность в точке  $x_0$  (сингулярная точка поворота) и в нуль в точках  $x_{1,2}$  (обычные точки поворота). Области прозрачности волны, определённые условием  $k_x^2 > 0$ , имеют место при  $x_1 < x < x_0$  и при  $x_0 < x < x_2$ .

Разделим весь интервал изменения радиальной координаты на интервалы I–VII (рис. 37). Интервалы I, III, V, VII находятся достаточно далеко от точек поворота, там применимо ВКБ-приближение. В областях II, IV, VI можно воспользоваться линейными разложениями функции  $K(x)$ . При этом в областях II и VI уравнение (2.20) сводится к уравнению Эйри. Эти области пересекаются с областями I, III и V, VII, соответственно. В интервале IV слева (справа) от точки  $x_0$  уравнение (2.20) сводится к уравнению Бесселя (модифицированному уравнению Бесселя) 1-го порядка. Эта область пересекается с областями III и V.

Сшивая решения в пересекающихся областях, находим полное решение уравнения. В ответ будет входить только одна неопределённая постоянная  $a$ , в качестве которой мы выберем постоянную при решении в области II. Мы приведём решение только о областях II–VI, опуская математические детали. Область II:

$$E_y = a \operatorname{Ai} \left( \frac{x_1 - x}{\lambda_1} \right). \quad (2.22)$$

Область III:

$$E_y = \frac{a}{\sqrt{k_x}} \frac{(2K'_1)^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \sin \left[ \int_{x_1}^x k_x(x') dx' + \frac{i\pi}{4} \right]. \quad (2.23)$$

Область IV,  $x < x_0$ :

$$E_y = -\frac{a}{\sqrt{2\alpha}} (2K'_0)^{1/6} \sqrt{\alpha(x_0 - x)} \cdot \left[ \cos \varphi \cdot J_1 \left( \sqrt{\alpha(x_0 - x)} \right) + i \sin \varphi \cdot Y_1 \left( \sqrt{\alpha(x_0 - x)} \right) \right]. \quad (2.24)$$

Область IV,  $x > x_0$ :

$$E_y = \frac{a}{\sqrt{2\alpha}} (2K'_0)^{1/6} \sqrt{\alpha(x-x_0)} \cdot \left[ e^{i\varphi} \cdot I_1 \left( 2\sqrt{\alpha(x-x_0)} \right) + \frac{2i}{\pi} \sin \varphi \cdot K_1 \left( 2\sqrt{\alpha(x-x_0)} \right) \right]. \quad (2.25)$$

Область V:

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{k_x}} \frac{a}{\sqrt{\pi}} (2K'_1)^{1/6} \left[ \frac{1}{2} \exp \left( \varphi + \int_{x_0}^x |k_x| dx' \right) + i \sin \varphi \exp \left( - \int_{x_0}^x |k_x| dx' \right) \right]. \quad (2.26)$$

Область VI:

$$E_y = a \left( \frac{K'_1}{K'_2} \right)^{1/6} \left[ e^{\psi+i\varphi} \text{Ai} \left( \frac{x_2-x}{\lambda_2} \right) + i \sin \varphi e^{-\psi} \text{Bi} \left( \frac{x_2-x}{\lambda_2} \right) \right]. \quad (2.27)$$

Здесь обозначено: Ai, Bi – функции Эйри,  $J_1$ ,  $Y_1$  – функции Бесселя,  $I_1$ ,  $K_1$  – модифицированные функции Бесселя,  $K'_{0,1,2}$  – производная  $dK/dx$  в точках  $x_0, x_1, x_2$ ,  $\lambda_{1,2} = (2K'_{1,2})^{-1/3}$ ,  $\alpha = \omega^4 \eta^2 / c^4 K'_0$ ,  $\varphi = \int_{x_1}^{x_0} k_x dx$ ,  $\psi = \int_{x_0}^{x_1} |k_x| dx$ ,

Обсудим основные выводы, следующие из анализа этого решения.

Прежде всего, возникает вопрос о наличии альфвеновского резонанса, т.е. особенности волнового поля. Как следует из (2.24, 2.25), в точке  $x_0$  (где величина  $K(\omega, x)$  обращается в нуль) компонента  $E_y$  имеет точку ветвления, оставаясь конечной по амплитуде:

$$E_y \simeq -\frac{a}{\sqrt{2\alpha}} (2K'_1)^{1/6} i \sin \varphi [-1 + \sqrt{\alpha(x_0-x)} \ln \sqrt{\alpha(x_0-x)}]. \quad (2.28)$$

Такое поведение разительно отличается от поведения этой компоненты в обычном альфвеновском резонансе, где, как известно, эта компонента имеет логарифмическую особенность на резонансной поверхности. Особенность (2.28) исчезает, если  $\sin \varphi = 0$ , что является неким условием квантования частоты  $\omega$ .

Однако, как видно из (2.18), радиальная компонента электрического поля имеет степенную особенность вида  $E_x \propto (x-x_0)^{-1}$ , как и в обычном альфвеновском резонансе. Эта особенность имеет место даже если  $\sin \varphi = 0$ .

Как видно из (2.23), в области прозрачности  $x_1 < x < x_0$  волна является стоячей поперёк магнитных оболочек. Это поведение является довольно неожиданным, т.к. область прозрачности ограничена одной обычной и одной сингулярной точкой

поворота. Важно отметить, что эта структура стоячей волны появляется при любой частоте волны, т.е. для её существования не необходимо квантование частоты волны или любой другой величины.

Колебательная структура в области прозрачности не имеет аналога для обычного альфвеновского резонанса. В МГД-приближении аналогичная структура возникает при учёте кривизны силовых линий [Leonovich and Mazur, 1993] и шира магнитного поля [Klimushkin and Mager, 2004], но там волна является не стоячей поперёк магнитных оболочек, а распространяется от обычной к сингулярной точке поворота.

Из формулы (2.27) следует, что асимптотика волнового поля в области  $(x - x_2)/\lambda_2 \gg 1$ , т.е. в части области прозрачности  $x_0 < x < x_2$ , непосредственно примыкающей к точке  $x_2$ , имеет вид

$$E_y \simeq \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{K'_1}{K'_2} \right)^{1/6} \left( \frac{\lambda_2}{x - x_2} \right)^{1/4} \cdot \left[ e^{\psi + i\varphi} \sin \left( \int_{x_2}^x k_x dx' + \frac{\pi}{4} \right) + ie^{-\psi} \sin \varphi \cos \left( \int_{x_2}^x k_x dx' + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (2.29)$$

Эта формула описывает структуру в виде суперпозиции двух стоячих волн, амплитуда одной из которых существенно (в  $e^{-2\psi}$  раз) меньше амплитуды другой. Её можно также представить в виде суперпозиции волны, прибегающей к точке  $x_2$  и волны, отражённой от этой точки. Амплитуда отражённой волны немного меньше амплитуды прибегающей, что является следствием поглощения части энергии в резонансной точке. Стоячую волну с малой амплитудой в формуле (2.29) можно трактовать также как следствие обратного влияния резонанса на породившую его падающую волну. Такое же поведение характерно и для структуры волнового поля в МГД-приближении. Но есть и одно существенное отличие: при  $\sin \varphi = 0$  (т.е. при том самом условии, при котором особенность (2.28) исчезает), вторая стоячая волна исчезает, т.е. отражённая волна имеет ту же амплитуду, что и падающая.

Далее, с наблюдательной точки зрения важно знать изменение поляризации волны в пространстве. Исходя из (2.18) можно получить следующее выражение при

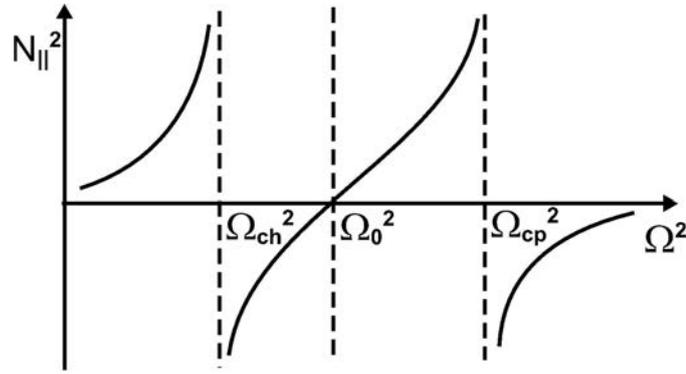


Рисунок 38. Продольный коэффициент преломления как функция частоты волны.

$k_y = 0$ :

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{\omega^2 i\eta}{c^2 K}. \quad (2.30)$$

Ненулевое и конечное значение этой величины означает эллиптическую поляризацию,  $E_x/E_y = 0$  или  $E_x/E_y \rightarrow \infty$  – линейную. Как видно из этой формулы, волна является линейно-поляризованной в точке резонанса, при  $x = x_0$ , поскольку в этой точке  $K = 0$ . При переходе через резонансный пик поляризация меняется с правой на левую. Это соответствует изменению фазы волны на  $180^\circ$ . Аналогичное поведение имеет место вблизи поверхности магнитогидродинамического альфвеновского резонанса [Chen and Hasegawa, 1974; Southwood, 1974]. Есть, однако, и важные отличия. Изменение отношения  $E_x/E_y$  в нашем случае не связано с изменением знака производной  $dE_y/dx$ , как в МГД-случае, и зависит только от свойств плазмы, в то время как в МГД-случае знак  $E_x/E_y$  зависел от знака азимутальной компоненты волнового вектора.

#### 2.1.4 Резонансные частоты в мультикомпонентной плазме

Рассмотрим резонансное условие в продольно-однородной плазме более подробно. В этом случае продольную структуру можно представить в виде  $\exp ik_{\parallel} z$ . Тогда оператор  $\hat{L}_T$  становится алгебраическим, и резонансное условие сводится к виду

$$\hat{L}_T(\omega, x) = 0. \quad (2.31)$$

Пусть  $\Omega$  есть решение этого уравнения. Тогда положение резонансной поверхности определяется как решение уравнение  $\omega = \Omega(x)$  относительно радиальной

координаты. Резонансная частота  $\Omega$  является аналогом тороидальной собственной частоты в МГД-случае [Leonovich and Mazur, 1993]. Для исследования резонансной частоты введём продольный показатель преломления  $N_{\parallel}^2 \equiv k_{\parallel}^2 c^2 / \omega^2$  и будем изучать его зависимость от частоты волны. Обратим внимание, что, хотя вблизи резонансной поверхности  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ , величина поперечной компоненты волнового вектора  $k_{\perp}$  (она же радиальная компонента) не входит в резонансное условие  $K = 0$ , поэтому, пользуясь принятой в этих учебниках терминологией, мы имеем продольное распространение! Отметим также, что в условие (2.31) не входят недиагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\eta$ . Для плазмы, в которой имеются две ионные компоненты, лёгкие (протоны, индекс  $p$ ) и тяжёлые (индекс  $h$ ), выражение для продольного показателя преломления имеет вид:

$$N_{\parallel}^2 = \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\omega_{cp}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{\omega}_h^2}{\omega_{ch}^2 - \Omega^2}. \quad (2.32)$$

Зависимость  $N_{\parallel}^2(\Omega)$  показана на рис. 3. Как видим,  $N_{\parallel}^2 \rightarrow -\infty$  при  $\Omega \rightarrow \omega_{ch}$  и  $N_{\parallel}^2 \rightarrow +\infty$  при  $\Omega \rightarrow \omega_{cp}$ . В промежутке между гирочастотами лёгких и тяжёлых ионов располагается частота  $\Omega_0$ , при которой  $N_{\parallel}^2 = 0$ . Её значение есть

$$\Omega_0^2 = \left(1 + \frac{n_h m_p}{n_p m_h}\right)^{-1} \cdot \left(\omega_{ch}^2 + \frac{n_h m_p}{n_p m_h} \omega_{cp}^2\right), \quad (2.33)$$

где  $n_{h,p}$  — концентрации тяжёлых и лёгких ионов,  $m_{h,p}$  — их массы. Заметим, что, по оценкам [Zurbuchen et al., 2011; Raines et al., 2015], в меркурианской магнитосфере  $0.1 < n_{Na}/n_p < 1$ , поэтому первый множитель этого выражения там мало отличается от единицы ( $m_{Na}/m_H = 23$ ).

Как видно из рис. 38,  $N_{\parallel}^2 > 0$  только при  $\Omega < \omega_{ch}$  либо  $\Omega_0 < \Omega < \omega_{cp}$ . Таким образом, резонанс может иметь место только для волн, частоты которых располагаются в указанных интервалах. Волны в первом из них — это обычные ионно-циклотронные волны, в пределе  $\omega/\omega_{ch} \rightarrow 0$  переходящие в альфвеновские. Что касается волн с частотами, лежащими во втором из этих интервалов, то им нет аналога в электронно-протонной плазме. Волновая мода, соответствующая этому интервалу, носит название ионно-ионной гибридной моды [Buchsbaum, 1960]. За-

метим, что частота волны, зафиксированной в меркурианской магнитосфере, лежит именно во втором промежутке. Таким образом, мы приходим к выводу, что УНЧ-колебания в магнитосфере Меркурия должны быть отождествлены с ионно-ионной гибридной модой.

## 2.2 Сцепление альфвеновской и медленной магнитозвуковой мод

Сцепление альфвеновских волн и ММЗ имеет большое значение для азимутально-мелкомасштабных волн ( $m \gg 1$ ) [Southwood and Saunders, 1985]. В ряде работ изучалась продольная структура сцепленных мод [Walker, 1987; Taylor and Walker, 1987]. В работе [Климушкин, 1997] изучалась поперечная структура, но акцент был сделан на альфвеновские моды. В данном разделе мы подробнее рассмотрим структуру ММЗ поперек магнитных оболочек при учете сцепления с альфвеновской волной. Важность изучения структуры ММЗ обуславливается тем, что с этой модой часто идентифицируются компрессионные волны Pc5 [Zhu and Kivelson, 1991; Leonovich et al., 2006; Du et al., 2011], хотя такая интерпретация не является общепринятой [Chelpanov et al., 2016].

### 2.2.1 Основные уравнения

В одножидкостной магнитной гидродинамике принимается, что продольное электрическое поле в плазме  $\vec{E}_{\parallel}$  равно нулю. Двумерное поле  $\vec{E}_{\perp}$  может быть разбито на сумму потенциальной и вихревой компонент

$$\vec{E} = -\nabla_{\perp}\Phi + \nabla_{\perp} \times \vec{e}_{\parallel}\Psi, \quad (2.34)$$

где  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{B}/B$ . В холодной плазме  $\Phi$  и  $\Psi$  характеризуют альфвеновскую волну и быстрый магнитный звук, соответственно [Климушкин, 1994]. В горячей плазме необходимо использовать также третью переменную, в качестве которой удобно выбрать величину, пропорциональную дивергенции смещения плазмы от положения равновесия  $\vec{\xi}$ :

$$\Theta = \frac{\sqrt{4\pi\gamma P}}{ck_2} \nabla \cdot \vec{\xi}. \quad (2.35)$$

Поскольку рассматриваются колебания с большими значениями азимутального волнового числа,  $m \gg 1$ , для анализа пространственной структуры волнового поля может быть использовано приближение ВКБ по радиальным координатам, теория которого в двумерно-неоднородной плазме была основана в работе [Leonovich and Mazur, 1993]. В этом приближении функции  $\Phi$  и  $\Theta$  могут быть записаны в виде

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x^3, x^1) \\ H(x^3, x^1) \end{pmatrix} \cdot \exp i \int k_1(x^1) dx^1,$$

где  $k_1$  есть радиальная компонента волнового вектора.

Введем обозначения:  $v_s = \sqrt{\gamma P / \rho}$  – скорость звука,  $v_A = B / \sqrt{4\pi\rho}$  – альфвеновская скорость, и  $v_c = v_s v_A / \sqrt{v_s^2 + v_A^2}$  – скорость медленного магнитного звука.

Операторы

$$\hat{L}_T(\omega) = \partial_3 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \partial_3 + \frac{\sqrt{g} \omega^2}{g_1 v_A^2}$$

и

$$\hat{L}_P(\omega) = \partial_3 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \partial_3 + \frac{\sqrt{g} \omega^2}{g_2 v_A^2} - \frac{\sqrt{g}}{g_2} \frac{2J}{BR}$$

будем называть операторами тороидальной и полоидальной альфвеновской моды, соответственно. Оператор

$$\hat{L}_S(\omega) = \sqrt{g} v_s^2 \frac{\omega^2}{v_c^2} + \partial_3 v_s^2 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \partial_3$$

будем называть оператором медленной магнитозвуковой моды. Коэффициент

$$\alpha = \sqrt{4\pi\gamma P} \frac{2\sqrt{g_1 g_3}}{BR}$$

(где  $R$  – радиус кривизны силовой линии) отвечает за сцепление альфвеновской и ММЗ мод.

Как следует из уравнений 1-жидкостной МГД, в пределе  $m \gg 1$  функции  $F$  и  $H$  связаны уравнениями

$$\hat{L}_S(\omega) H = \alpha \omega F \quad (2.36)$$

и

$$k_1^2 \hat{L}_T(\omega) F + k_2^2 \hat{L}_P(\omega) F = k_2^2 \alpha \omega H, \quad (2.37)$$

выведенными в работах [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998b] и позднее, но независимо, в работах [Черемных и Данилова, 2011; Мазур и др., 2012]. В однородной плазме система первое из этих уравнений сводится к дисперсионному уравнению ММЗ

$$s^2(\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_c^2) = 0,$$

и второе — альфвеновской моды

$$k_{\perp}^2(\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_A^2) = 0.$$

Поэтому в дальнейшем уравнения (2.71) и (2.37) будут называться уравнениями ММЗ- и альфвеновской мод, соответственно. Система (2.36, 2.37) описывает сцепление этих мод за счет кривизны силовых линий магнитного поля.

Система (2.36, 2.37) должна быть дополнена граничными условиями на ионосфере. В этом качестве будут использованы так называемые жесткие граничные условия, когда ионосфера считается идеально проводящей жесткой поверхностью. Тогда электрическое поле и дивергенция смещения плазмы обращается в нуль на ионосфере:

$$F(x^3, x^1), H(x^3, x^1)|_{x^3=x_{\pm}^3} = 0. \quad (2.38)$$

Здесь  $x_{\pm}^3$  — координаты точек пересечения магнитной силовой линии с ионосферой.

Что касается третьей волновой переменной,  $\Psi$ , то в азимутально-мелкомасштабном пределе она выражается через функции  $\Phi$  и  $\Theta$  в виде

$$B_3 = \frac{ck_2}{\omega} \frac{g_3}{\sqrt{g}} \left[ \sqrt{\frac{g}{g_3}} \frac{v_s^2 B}{v_A^2} \frac{\omega}{\sqrt{4\pi\gamma P}} \Theta - \sqrt{g_1} \frac{J}{B} \Phi \right]. \quad (2.39)$$

и не является независимой переменной. Эта функция определяет продольное магнитное поле волны:

$$B_3 = \frac{ic}{\omega} \frac{g_3}{\sqrt{g}} \left( \partial_1 \frac{g_2}{\sqrt{g}} \partial_1 + \partial_2 \frac{g_1}{\sqrt{g}} \partial_2 \right) \Psi.$$

Возмущение плазменного давления

$$\delta P = -\vec{\xi} \cdot \nabla P - \gamma P \nabla \cdot \vec{\xi}$$

выражается через функции  $\Phi$  и  $\Theta$  как

$$\delta P = -\frac{ck_2}{\omega} \left( \gamma P \frac{\omega}{\sqrt{4\pi\gamma P}} \Theta - \frac{J}{4\pi\sqrt{g_2}} \Phi \right). \quad (2.40)$$

Сравнивая с выражением (2.39), мы находим, что в азимутально-мелкомасштабном пределе возмущение полного давления обращается в нуль:

$$\delta P + \frac{BV_3}{4\pi\sqrt{g_3}} = 0. \quad (2.41)$$

## 2.2.2 Область локализации медленного магнитного звука

Если частота волны  $\omega$  задана, решение задачи (2.36, 2.37, 2.38) определяет собственные функции  $H_N(x^3, x^1)$  и  $F_N(x^3, x^1)$ , описывающие продольную структуру волнового поля (здесь  $N$  — продольное волновое число); эти функции зависят также от радиальной координаты  $x^1$  как от параметра. Собственной величиной задачи (2.36, 2.37, 2.38) является радиальная компонента волнового вектора  $k_1 = k_{1N}(x^1, \omega)$ , определяющая радиальную структуру волнового поля. Особое значение имеют поверхности, где величина  $k_1$  стремится к бесконечности (резонансные поверхности) и к нулю (поверхности отражения). Для начала рассмотрим резонансные поверхности. Одна из них может быть найдена из уравнения

$$\hat{L}_T(\omega)T(x^3, x^1) = 0, \quad T(x^3_{\pm}) = 0. \quad (2.42)$$

Собственная функция этого уравнения (так называемая тороидальная функция, см. Leonovich and Mazur [1993]) будет обозначаться  $T_N$ , собственное значение —  $\Omega_{TN}(x^1)$ . Тороидальная функция может быть нормализована следующим образом:

$$\left\langle \frac{\sqrt{g} T_N T_{N'}}{g_1 v_A^2} \right\rangle = \delta_{NN'}. \quad (2.43)$$

Здесь треугольные скобки обозначают интегрирование вдоль силовой линии между магнитосопряженными точками ионосферы:  $\langle \dots \rangle = \int_{x^3_-}^{x^3_+} (\dots) dx^3$ . Этот резонанс (который часто называется альфвеновским резонансом) имеет место на поверхности  $x^1_{TN}$ , на которой выполняется равенство  $\omega = \Omega_{TN}(x^1)$ . Подробное исследование этого резонанса не входит в нашу задачу, однако собственные функции  $T_N$  и собственные значения  $\Omega_{TN}$  пригодятся нам для других целей.

Второй резонанс определяется из решения уравнения

$$\hat{L}_S(\omega)S(x^3, x^1) = 0, \quad S(x^3_{\pm}) = 0. \quad (2.44)$$

Соответствующие собственные функции будут обозначаться  $S_N$ . Их амплитуда будет фиксироваться с помощью условия нормировки

$$\left\langle \frac{v_s^2}{v_c^2} \sqrt{g} S_N S_{N'} \right\rangle = \delta_{NN'}. \quad (2.45)$$

Соответствующие собственные значения будут обозначаться  $\Omega_{sN}(x^1)$ . Этот резонанс (обычно называемый медленно-магнитозвуковым (ММЗ), иногда касповым резонансом) имеет место на поверхности, где выполняется равенство  $\omega = \Omega_{sN}(x^1)$ .

Приступим к нахождению зависимости  $k_{1N}^2(\omega, x^1)$  вблизи поверхности ММЗ-резонанса. Будем использовать метод возмущений, предполагая

$$H = S_N + h, \quad (2.46)$$

где  $h$  является малой поправкой. Заметим, что вблизи резонанса, где  $k_1^2 \gg k_2^2$ , уравнение (2.37) сводится к виду

$$k_1^2 \hat{L}_T(\omega)F = k_2^2 \alpha \omega S_N. \quad (2.47)$$

Решение этого уравнение есть

$$F = \frac{1}{k_{1N}^2} \sum_{N'} a_{N'} T_{N'}. \quad (2.48)$$

Подставим это выражение в (2.47), умножим на  $T_{N'}$  и проинтегрируем вдоль силовой линии между магнитосопреженными точками ионосферы 'туда и обратно'.

Используя эрмитов характер оператора  $\hat{L}_T$  и нормировку (2.43), мы получаем:

$$a_{N'}(\Omega_{sN}^2 - \Omega_{TN'}^2) = k_2^2 \Omega_{sN} \langle \alpha S_N T_{N'} \rangle.$$

Следовательно, если для любых значений  $N', N$  выполняется неравенство  $\Omega_{sN} \ll \Omega_{TN'}$ , мы находим функцию  $F(x^3)$ :

$$F = -\frac{k_2^2}{k_{1N}^2} \sum_{N'} \frac{\Omega_{sN}}{\Omega_{TN'}^2} \langle \alpha S_N T_{N'} \rangle T_{N'}. \quad (2.49)$$

Теперь мы снова возвращаемся к уравнению (2.36). Подставляя сюда (2.46) и (2.49), умножая на  $S_N$  и интегрируя вдоль силовой линии, а также принимая

во внимание эрмитовость оператора  $\hat{L}_S$ , равенство (2.44) и условие нормировки (2.45), мы получаем зависимость квадрата радиальной компоненты волнового вектора от радиальной координаты вблизи поверхности ММЗ-резонанса:

$$k_{1N}^2(\omega, x^1) = -\frac{k_2^2}{\omega^2 - \Omega_{sN}^2(x^1)} \sum_{N'} \left( \frac{\Omega_{sN}}{\Omega_{TN'}} \right)^2 \langle \alpha S_N T_{N'} \rangle^2. \quad (2.50)$$

Важно отметить, что положительным значениям  $k_1^2$  соответствуют частоты  $\omega < \Omega_{sN}$ . Это означает, что если  $\Omega_{sN}$  убывает с расстоянием от Земли, то область прозрачности (характеризуемая положительными значениями  $k_1^2$ ) лежит внутри резонансной поверхности.

Теперь перейдем к рассмотрению поверхностей отражения. Обозначим  $\Omega_{CN}$  частоту, при которой  $k_1 = 0$ . Эта частота возникает как собственная частота задачи

$$\hat{L}_S(\Omega_{CN})H = \alpha\Omega_{CN}F, \quad (2.51)$$

и

$$\hat{L}_P(\Omega_{CN})F = \alpha\Omega_{CN}H, \quad (2.52)$$

с граничным условием (2.38). Поскольку эта система эквивалентна уравнению четвертого порядка по продольной координате, каждому значению  $N$  соответствует две частоты отсечки, одна из которой ближе к тороидальной частоте, другая — к резонансной ММЗ частоте. Первую из них мы будем называть полоидальной частотой и обозначать  $\Omega_{PN}$ . Ее рассмотрению было посвящено много работ (например, [Mager and Klimushkin, 2002; Klimushkin et al., 2004]). Основное внимание будет уделено второй из них, которую мы будем называть ММЗ-отсечкой. Поверхности ММЗ-отсечки расположена недалеко от поверхности ММЗ резонанса, ее координата является решением уравнения  $\omega = \Omega_{CN}(x^1)$ .

Для отыскания  $\Omega_{CN}(x^1)$  выразим из (2.47)  $F$  через  $H$ . Для этого введем собственную функцию полоидального оператора, определяемую как решение задачи

$$\hat{L}_P(\omega)P(x^3, x^1) = 0, \quad P(x^3_{\pm}, x^1) = 0. \quad (2.53)$$

В качестве нормировки используем соотношение

$$\left\langle \frac{\sqrt{g} P_N P_{N'}}{g_2 A^2} \right\rangle = \delta_{NN'}. \quad (2.54)$$

Разложим функцию  $F$  по базису  $P_N$ :

$$F = \sum_{N'} b_{N'} P_{N'}. \quad (2.55)$$

Действуя далее также, как при выводе уравнения (2.49), получаем:

$$F = \sum_{N'} \frac{\Omega_{CN}}{\Omega_{CN}^2 - \Omega_{PN'}^2} \langle \alpha H_N P_{N'} \rangle P_{N'}. \quad (2.56)$$

Подставляя это выражение в (2.36), получаем интегро-дифференциальное уравнение  $H$  для функции

$$\hat{L}_S(\Omega_{CN})H = \alpha \sum_{N'} \frac{\Omega_{CN}}{\Omega_{CN}^2 - \Omega_{PN'}^2} \langle \alpha H P_{N'} \rangle P_{N'}. \quad (2.57)$$

Предположим, что величины  $\Omega_{CN}$  и  $\Omega_{SN}$  мало различаются между собой. Тогда для решения уравнения (2.57) можно воспользоваться теорией возмущений, представляя функцию  $H$  и частоту  $\Omega_{CN}$  в виде

$$H = S_N + s, \quad (2.58)$$

$$\Omega_{CN} = \Omega_{SN} + \varepsilon, \quad (2.59)$$

где  $s$  и  $\varepsilon$  – малые поправки. Правую часть (2.57) считаем малой в силу предполагаемого неравенства  $\Omega_{PN'}^2/\Omega_{CN}^2 \ll 1$ . Тогда для поправок получаем уравнение

$$\hat{L}_S(\Omega_{CN})s + \sqrt{g} \frac{s^2}{v_s^2} \varepsilon S_N = - \sum_{N'} \frac{\Omega_{SN}^2}{\Omega_{PN'}^2} \langle \alpha S_N P_{N'} \rangle \alpha P_{N'}.$$

Умножаем на  $S_N$ , интегрируем вдоль силовой линии. Получаем

$$\Omega_{CN}^2 = \Omega_{SN}^2 - \sum_{N'} \frac{\Omega_{SN}^2}{\Omega_{PN'}^2} \langle \alpha S_N P_{N'} \rangle^2. \quad (2.60)$$

Обратим внимание: частота ММЗ-отсечки всегда меньше резонансной собственной частоты ММЗ. Отсюда следует, что если резонансная частота убывает с ростом радиальной координаты, то соответствующие поверхности отражения ближе

к Земле, чем резонансная поверхность. Это соответствует сказанному выше, что  $k_1^2 > 0$  при  $x^1 < x_{SN}^1$ .

Таким образом, мы приходим к выводу: в результате сцепления с альфвеновской модой ММЗ приобретает дисперсию поперек магнитных оболочек. На некоторой магнитной оболочке (резонансной) радиальная компонента волнового вектора обращается в бесконечность. Внутри нее находится магнитная оболочка, на которой эта величина обращается в нуль. Между этими оболочками находится область прозрачности, где  $k_1^2 > 0$ . Именно эта область является областью локализации ММЗ.

### 2.2.3 Продольная структура ММЗ в ВКБ приближении

Наиболее наглядно продольная структура и собственные частоты могут быть изучены в продольном ВКБ-приближении, применимом для высоких  $N$ -гармоник. Для начала пренебрежем сцеплением ММЗ с альфвеновской модой. Тогда уравнение (2.71) переписывается в виде (2.44),  $\hat{L}_S S = 0$ . В ВКБ-приближении искомую функцию можно представить в виде  $S = e^{i\psi_0 + i\psi_1}$ , где  $\psi_0$  и  $\psi_1$  описывают главный и первый порядок, соответственно. Продольная ковариантная и „физическая“ компонента волнового вектора определяются соотношениями  $\partial_3 \psi_0 = k_3$  и  $k_{||} = k_3 / \sqrt{g_3}$ . Тогда в главном порядке уравнение (2.44) приводит к выражению

$$k_3 = \frac{\omega}{v_c} \sqrt{g_3}. \quad (2.61)$$

Функция  $\psi_1$  определяется из уравнения

$$\left( v_s^2 \frac{\sqrt{g}}{g_3} \right)' + v_s^2 \frac{\sqrt{g}}{g_3} (i k_3' - 2 k_3 \psi_1) = 0.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по координате  $x^3$ . Используя также условие нормировки (2.45), получаем решение уравнения  $\hat{L}_S S = 0$ , удовлетворяющее граничным условиям на ионосфере  $S(x_{\pm}^3) = 0$ :

$$S = \frac{\omega}{t_s} \left( v_s^2 \frac{\sqrt{g}}{g_3} k_3 \right)^{-1/2} \sin \int_{x_-^3}^{x_+^3} k_3(x^{3'}) dx^{3'}, \quad (2.62)$$

где

$$t_s = \int_{x_-^3}^{x_+^3} dx^3 \frac{\sqrt{g_3}}{v_c}$$

— время пробега вдоль силовой линии с локальной медленной магнитозвуковой скоростью. Собственная частота оказывается равной

$$\Omega_{SN} = \frac{\pi N}{t_s}. \quad (2.63)$$

Отсюда видно, чем обуславливается малость собственной магнитозвуковой частоты: большой величиной  $t_s$  из-за малой скорости звука вдали от экватора.

Найдем зависимость квадрата амплитуды волны от длины вдоль силовой линии:

$$a \propto \left( v_s^2 \frac{\sqrt{g}}{g_3} k_3 \right)^{-1} = \frac{t_s v_c}{\pi N v_s^2} \frac{1}{\sqrt{g_\perp}}.$$

Учитывая, что произведение  $B\sqrt{g_\perp}$  не зависит от длины вдоль силовой линии (ввиду условия  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ), находим

$$a \propto \frac{B\sqrt{\rho}}{\sqrt{P}}.$$

Поскольку при удалении от экватора магнитное поле и плотность растут, а давление неизменно, то максимум амплитуды волны должен быть вблизи ионосферы.

Найдем теперь частоту отсечки  $\Omega_{CN}$  из-за сцепления ММЗ и альфвеновской мод. В главном порядке ВКБ-приближения по продольной координате, когда можно ввести продольную компоненту волнового вектора  $k_\parallel$ , система (2.71, 2.37) приводится к виду

$$\omega^2 - k_\parallel^2 v_c^2 = \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \frac{4\omega^2 v_c^2}{R^2} \left[ (\omega^2 - k_\parallel^2 v_A^2) - \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \frac{2P'}{\rho R} \right]^{-1}. \quad (2.64)$$

Здесь  $k_y = k_2/\sqrt{g_2}$ , штрих означает дифференцирование по радиальной координате, поперечный волновой вектор определяется выражением  $k_\perp^2 = (k_1^2/g_1) + (k_2^2/g_2)$ .

Будем искать локальную продольную компоненту волнового вектора в виде  $k_\parallel^2 = (\omega^2 + \delta)/v_c^2$ , где  $\delta$  — малая поправка. Для этого будем полагать правую часть выражения (2.64) малой, что возможно при выполнении условия

$$\frac{\beta}{(k_\parallel R)^2} \ll 1.$$

С помощью метода возмущений находим

$$k_\parallel^2 = \frac{\omega^2}{v_s^2} + \frac{4}{R^2} \frac{v_s^2}{A^2}.$$

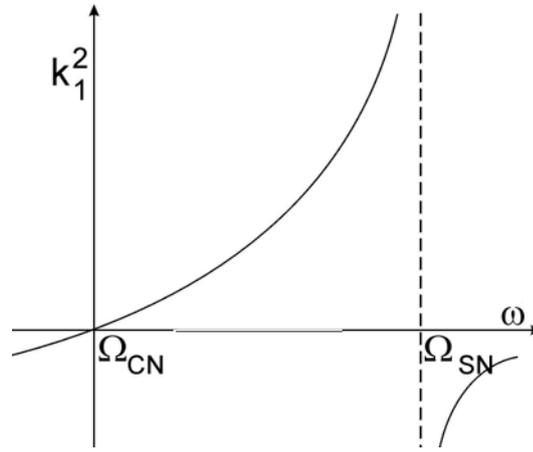


Рисунок 39. Закон дисперсии ММЗ, обусловленный сцеплением с альфвеновской модой

Частоту найдем из условия квантования  $\oint k_{\parallel} dl_{\parallel} = 2\pi N$  (интегрирование ведется вдоль силовой линии между магнитосопреженными точками ионосферы «туда и обратно»). Снова используя метод возмущений, получаем

$$\Omega_{CN} = \frac{\pi N}{t_s} - \frac{1}{\pi N} \oint \frac{dl_{\parallel} v_s^3}{R^2 A^2}. \quad (2.65)$$

В согласии с уравнением (2.60) из предыдущего раздела,  $\Omega_{CN} < \Omega_{SN}$ .

#### 2.2.4 Пространственная структура медленных магнитозвуковых мод при $m \gg 1$

Таким образом, благодаря сцеплению с альфвеновской волной, медленный магнитный звук приобретает дисперсию поперек магнитных оболочек. Когда частота волны стремится к частоте ММЗ-резонанса  $\Omega_{SN}(x^1)$ , радиальная компонента волнового вектора стремится к бесконечности. Когда частота волны стремится к частоте ММЗ-отсечки  $\Omega_{CN}(x^1)$ , радиальная компонента волнового вектора стремится к нулю (рис. 39). Поскольку обе эти собственные частоты зависят от радиальной координаты, можно ввести понятия резонансной частоты и частоты отражения, координаты которых определяются как решения уравнений  $\omega = \Omega_{SN}(x^1)$  и  $\omega = \Omega_{CN}(x^1)$ , соответственно. Между этими-то двумя магнитными оболочками волна и локализована. Если функции  $\Omega_{SN}(x^1)$  и  $\Omega_{CN}(x^1)$  убывают при удалении

от Земли и ввиду неравенства  $\Omega_{CN} < \Omega_{SN}$ , поверхность ММЗ-резонанса дальше от Земли, чем поверхность ММЗ-отсечки.

С математической точки зрения, причина появления поверхности отражения для ММЗ-моды заключается в том, что система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (2.71, 2.37) эквивалентна одному уравнению четвертого порядка, благодаря чему она имеет два решения, соответствующие одному и тому же значению радиальной компоненты волнового вектора  $k_{\perp}$ . Таким образом, в случае  $k_{\perp} = 0$  имеется две поверхности отражения, одна из которых соответствует полоидальной альфвеновской волне, другое — ММЗ.

### **2.3 Гидромагнитная неустойчивость сцепленных альфвеновской и медленной магнитозвуковой мод колебаний в корональных арках в солнечной короне**

Примером сцепленных альфвеновских и ММЗ-колебаний являются МГД-колебания корональных арок в солнечной атмосфере, отмечавшиеся в ряде работ [Bogachev et al., 2005; De Moortel, 2009; Kim et al., 2014]. Во многих случаях такие возмущения являются «гофрированными», поскольку их характерный масштаб вдоль оси аркады (т.е. поперек поля) намного меньше длины петель, образующих аркаду. Важность таких возмущений для физики Солнца невозможно переоценить, поскольку с ними могут быть связаны некоторые активные явления в солнечной короне — например, выбросы энергии вдоль нейтральной линии при вспышках, это резкая дестабилизация, которая может вызвать выброс корональной массы, а также филаментация корональных арок, вызывающая появление гофрированной тонкой структуры после вспышки. Роль гофрированных возмущений в активных явлениях позволяет предположить, что при определенных условиях арка становится неустойчивой относительно МГД-возмущений. Это обуславливает актуальность изучения неустойчивостей, связанных со сцеплением альфвеновских и ММЗ-колебаний в неоднородной плазме солнечной короны.

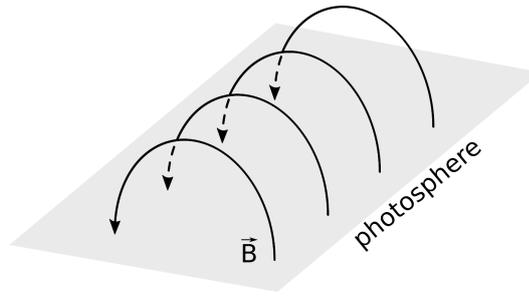


Рисунок 40. Цилиндрическая модель корональной арки.

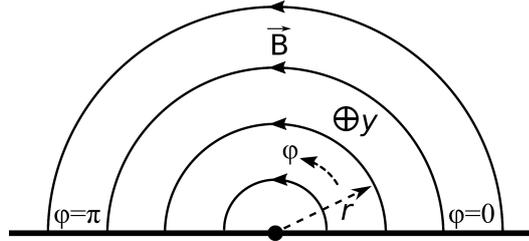


Рисунок 41. Цилиндрическая система координат.

### 2.3.1 Основные уравнения

Рассмотрим модель корональной арки в виде половины цилиндра с чисто азимутальным магнитным полем (рис. 40). Компонентой магнитного поля вдоль оси цилиндра будем пренебрегать. В такой модели геометрия магнитного поля соответствует z-пинчу, где магнитные поверхности представлены вложенными коаксиальными цилиндрами. Аналогичная модель корональной арки рассматривалась, например, в работах [Brady and Arber, 2005; Verwichte et al., 2006; Kaneko et al., 2015].

Колебания в такой системе уместно исследовать в цилиндрической системе координат (рис. 41), в которой азимутальный угол  $\varphi$  соответствует направлению вдоль силовых линий. Значения  $\varphi = 0, \pi/2$  соответствуют границе короны с фотосферой. Координата  $y$  направлена вдоль оси цилиндра. Координаты  $\varphi$ ,  $y$  и  $r$  локально-ортогональны друг другу. Все равновесные параметры в короне предполагаются зависящими только от радиуса силовой линии  $r$ .

Условие равновесия плазмы имеет вид

$$\nabla P = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}, \quad (2.66)$$

где  $P$ ,  $\vec{J}$  и  $\vec{B}$  — равновесные значения плазменного давления, плотности тока и магнитного поля, соответственно. Радиальный масштаб неоднородности давления будет обозначаться  $\kappa = P^{-1}dP/dr$ , отношение плазменного и магнитного давлений  $\beta = 8\pi P/B^2$ . В этих обозначениях условие равновесия можно переписать в виде

$$\frac{\beta}{2}\kappa + \frac{1}{B}\frac{dB}{dr} + \frac{1}{r} = 0. \quad (2.67)$$

В дальнейшем  $\beta$ ,  $\kappa$  и  $B$  будут считаться гладкими функциями радиальной координаты  $r$ .

Ввиду предполагаемой однородности плазмы в направлении  $y$ , возмущение любого параметра  $F$  может быть представлено в виде

$$F(r, y, \varphi, t) = F(r, \varphi) \exp(-i\omega t + ik_y y). \quad (2.68)$$

Здесь  $k_y$  — компонента волнового вектора вдоль оси арки. Зависимость  $F$  от радиальной координаты  $r$  определяется радиальными профилями величин  $P$ ,  $\vec{J}$  и  $\vec{B}$ , а также граничными условиями при  $r = 0, \infty$ .

В дальнейшем будет рассмотрено баллонное приближение, в котором считается, что характерные размеры возмущения поперек силовых линий, т.е. вдоль координат  $y$  и  $r$ , малы по сравнению с масштабами изменения равновесных величин. Необходимым условием для этого является большое значение компоненты волнового вектора вдоль оси арки:  $k_y \gg \kappa$ . Если к тому же радиальный масштаб возмущения много меньше радиуса силовой линии, по радиальной координате может быть использовано ВКБ-приближение, когда зависимость от  $r$  представляется в виде  $\exp i \int k_r(r, \omega) dr$ , где  $k_r$  — радиальная компонента волнового вектора. Полная поперечная компонента  $k_{\perp}$  волнового вектора представляется в виде

$$k_{\perp}^2 = (k_r^2 + k_y^2)^{1/2}.$$

В баллонном приближении волновое поле может быть охарактеризовано переменными  $\Phi$  и  $\Theta$ , введенными в разделе 2.2.1. Отметим, что в выбранной системе

координат величина  $\Theta$  записывается в виде

$$\Theta = \frac{\sqrt{4\pi\gamma P}}{ck_y} \nabla \cdot \vec{\xi}, \quad (2.69)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты.

В рассматриваемой геометрии система уравнений (2.36, 2.37) записывается в виде

$$\frac{k_{\perp}^2}{k_y^2} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \Phi - \beta \frac{\kappa}{r} \Phi = \frac{2\omega v_s}{r v_A} \Theta, \quad (2.70)$$

$$v_s^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{v_c^2} \right) \Theta = \frac{2\omega v_s}{r v_A} \Phi. \quad (2.71)$$

Здесь  $v_A$ ,  $v_s$  и  $v_c$  — альфвеновская скорость, скорость звука и скорость ММЗ:

$$v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}, \quad v_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}, \quad v_c^2 = \frac{v_A^2 v_s^2}{v_A^2 + v_s^2},$$

$\rho$  — равновесная плотность плазмы.

Уравнения (2.70) и (2.71) должны быть дополнены граничными условиями. По азимутальной координате должно быть использовано условие “закрепленности” силовых линий на фотосфере [Hood, 1986], означающее, что на фотосфере ( $\varphi = 0$  и  $\pi$ ) смещение плазмы от равновесного положения  $\vec{\xi}$  должно быть равно нулю:

$$\vec{\xi}|_{\varphi=0,\pi} = 0. \quad (2.72)$$

Это условие должно быть записано отдельно для поперечной и продольной (к магнитному полю  $\vec{B}$ ) компонент смещения. Поскольку поперечная компонента пропорциональна электрическому полю волны, условие  $\vec{\xi}_{\perp} = 0$  сводится к виду

$$\Phi|_{\varphi=0,\pi} = 0. \quad (2.73)$$

Продольная компонента смещения связана с функцией  $\Theta$  следующим образом:

$$\frac{\omega^2}{v_c^2} \frac{\omega}{ck_y} \xi_{\parallel} = -\frac{\sqrt{4\pi\gamma P}}{\omega} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}$$

[см. напр., Klimushkin, 1998b]. Следовательно, условие  $\vec{\xi}_{\parallel} = 0$  влечет за собой следующее граничное условие для функции  $\Theta$ :

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0,\pi} = 0. \quad (2.74)$$

Уравнения (2.70, 2.71), дополненные граничными условиями (2.73, 2.74) являются основными уравнениями, использованными в работе.

### 2.3.2 Альфвеновские и ММЗ-собственные функции

В общем случае уравнения (2.70) и (2.71) описываются сцепленные альфвеновские и ММЗ-моды. Рассмотрим уравнения, описывающие эти моды в приближении  $k_{\perp} \rightarrow \infty$ , когда сцеплением можно пренебречь.

Пусть  $\Phi_N$  — решение уравнения, описывающего альфвеновскую волну

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \Phi_N = 0, \quad (2.75)$$

с граничными условиями

$$\Phi_N|_{\varphi=0,\pi} = 0, \quad (2.76)$$

где  $N$  — продольное (вдоль силовой линии) волновое число. Нормировку функции  $\Phi_N$  выберем следующим образом:

$$\langle \Phi_N \Phi_{N'} \rangle = \delta_{NN'}, \quad (2.77)$$

где обозначено  $\langle \dots \rangle = \int_0^{\pi} (\dots) d\varphi$ .

Собственные функции граничной задачи (2.75), (2.76) имеют вид

$$\Phi_N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin N\varphi, \quad (2.78)$$

и соответствующие собственные частоты

$$\Omega_{AN} = \frac{Nv_A}{r}. \quad (2.79)$$

Аналогично, обозначим  $\Theta_N$  решение уравнения для медленного магнитного звука:

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{v_c^2} \right) \Theta_N = 0 \quad (2.80)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0,\pi} = 0. \quad (2.81)$$

Нормировку этой функции выберем в виде

$$\langle \Theta_N \Theta_{N'} \rangle = \delta_{NN'}, \quad (2.82)$$

где  $N$  и  $N'$  — целые числа. Тогда собственные функции будут иметь вид

$$\Theta_N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & \text{при } N = 0, \\ \cos N\varphi, & \text{при } N > 0. \end{cases} \quad (2.83)$$

Соответственно, собственные частоты

$$\Omega_{CN} = \frac{Nv_c}{r}. \quad (2.84)$$

Отметим, что случаи  $\omega = \Omega_{AN}$  и  $\omega = \Omega_{CN}$  соответствуют альфвеновскому и ММЗ-резонансам [Cheng et al., 1993; Klimushkin, 1998b; Черемных и др., 2014].

### 2.3.3 Дисперсионное уравнение для сцепленных МГД-мод

Решение уравнений (2.70, 2.71) с граничными условиями (2.73, 2.74) будем искать в виде разложениям по гармоникам  $\Phi_N$  and  $\Theta_N$ :

$$\Phi = \sum_{N=1}^{\infty} a_N \Phi_N, \quad (2.85)$$

$$\Theta = b_0 \Theta_0 + \sum_{N=1}^{\infty} \Theta_N, \quad (2.86)$$

где  $a_N, b_N$  — коэффициенты, подлежащие нахождению.

Подставив (2.86) в (2.71) и проинтегрировав по углу, получаем:

$$b_0 = \frac{2\omega v_s v_c^2 \langle \Theta_0 \Phi \rangle}{r v_A v_s^2 \omega^2}, \quad (2.87)$$

$$b_N = \frac{2\omega v_s v_c^2 \langle \Theta_N \Phi \rangle}{r v_A v_s^2 \omega^2 - \Omega_{CN}^2}. \quad (2.88)$$

Подставив далее (2.86) в (2.70), мы получим

$$\frac{k_{\perp}^2}{k_y^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2 r^2}{v_A^2} \right) \Phi - \beta \kappa r \Phi = 4 \frac{v_c^2}{v_A^2} \left[ \langle \Theta_0 \Phi \rangle + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \Theta_N}{\omega^2 - \Omega_{CN}^2} \langle \Theta_N \Phi \rangle \right]. \quad (2.89)$$

Симметричные и антисимметричные относительно “вершины” арки ( $\varphi = \pi/2$ ) моды  $\Phi$  должны быть рассмотрены отдельно. Свертка  $\langle \Theta_N \Phi_{N'} \rangle$  будет учитываться только лишь для наименьших значений  $N$  и  $N'$ .

**Альфвеновские собственные моды, симметричные относительно экватора.**

В этом случае существенный вклад в дисперсионное уравнение будут вносить только гармоники  $\Theta_0, \Theta_2, \Phi_1$ . Тогда уравнение (2.89) сводится к виду

$$\frac{k_{\perp}^2}{k_y^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2 r^2}{v_A^2} \right) \Phi_1 - \beta \kappa r \Phi_1 = 4 \frac{v_c^2}{v_A^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_{C2}^2} \cos 2\varphi \right]. \quad (2.90)$$

После того, как мы умножим это уравнение на  $\Phi_1$  и проинтегрируем по углу, мы получим приближенное дисперсионное уравнение

$$\frac{k_{\perp}^2}{k_y^2} (\omega^2 - \Omega_{A1}^2) - \beta \frac{\kappa v_A^2}{r} = \frac{32 v_c^2}{\pi^2 r^2} \left( 1 + \frac{2}{9} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_{C2}^2} \right), \quad (2.91)$$

где использованы также условия (2.79) и (2.84).

Случай  $k_r \rightarrow \infty$  соответствует альфвеновскому и ММЗ-резонансам, имеющим место на цилиндрических поверхностях, где частота волны равна, соответственно,  $\Omega_{A1}$  и  $\Omega_{C2}$ . Противоположный случай  $k_r \rightarrow 0$  соответствует поверхностям отражения, определяемым уравнением

$$\omega = \Omega_{\pm}(r),$$

где  $\Omega_{\pm}$  — решение биквадратного уравнения (2.91) при условии  $k_{\perp}^2/k_y^2 = 1$ :

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ (\Omega_{A1}^2 + \Omega_{C2}^2 + H) \pm \sqrt{D} \right]. \quad (2.92)$$

Здесь обозначено

$$H = \beta \frac{\kappa v_A^2}{r} + \frac{32}{\pi^2} \frac{11 v_c^2}{9 r^2} \quad (2.93)$$

и

$$D = (\Omega_{A1}^2 - \Omega_{C2}^2 + H)^2 + \left( \frac{16}{3\pi} \right)^2 \frac{v_c^2}{r^2} \Omega_{C2}^2. \quad (2.94)$$

Отметим, что величина  $D$  всегда положительна.

Неустойчивость ( $\Omega_-^2 < 0$ ) может развиваться на ветви с меньшей частотой при условии

$$(\Omega_{A1}^2 + \Omega_{C2}^2 + H) - \sqrt{D} < 0,$$

которое сводится к виду:

$$\beta \kappa r < -1 - \frac{32 v_c^2}{\pi^2 v_A^2}. \quad (2.95)$$

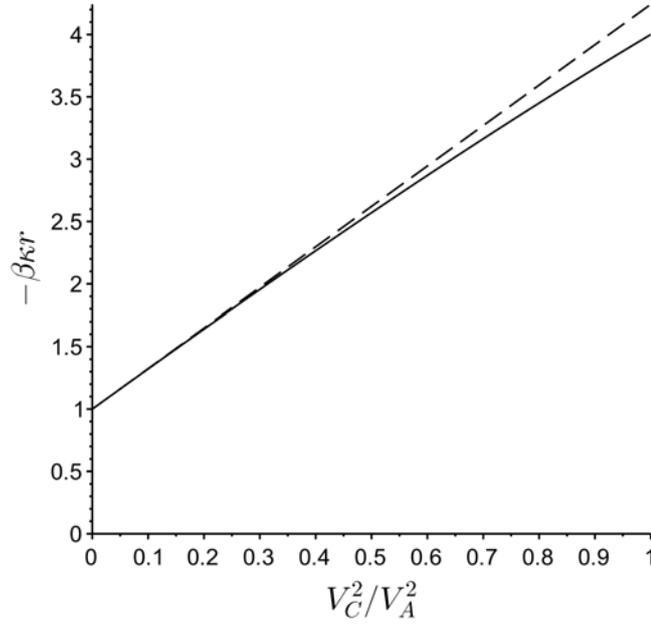


Рисунок 42. Сопоставление точного (сплошные линии) и приближенного (пунктир) значения порога неустойчивости для симметричных функций  $\Phi$ .

Отметим, что это условие качественно совпадает с результатами работы [Бурдо и др., 2000], полученными для дипольного магнитного поля. Инкремент неустойчивости есть

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{D} - (\Omega_{A1}^2 + \Omega_{C2}^2 + H) \right]^{1/2}. \quad (2.96)$$

Условие (2.95) дает лишь приближенное значение порога неустойчивости. Точное значение порога в симметричном случае может быть найдено непосредственно из уравнения (2.89) при  $\omega = 0$ ,  $k_{\perp}^2/k_y^2 = 1$  и граничном условии (2.73):

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi - \beta \kappa r \Phi = 4 \frac{v_c^2}{v_A^2} \langle \Theta_0 \Phi \rangle. \quad (2.97)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Phi_{2m-1}, \quad (2.98)$$

где  $\Phi_{2m-1}$  — нечетные собственные функции  $\Phi_N$  (2.78). В этом случае условие неустойчивости сводится к выражению

$$\left( \frac{2}{\pi \sqrt{-\beta \kappa r}} \tan \frac{\pi \sqrt{-\beta \kappa r}}{2} - 1 \right) \frac{v_C^2}{v_A^2} - \frac{\beta \kappa r}{4} = 0. \quad (2.99)$$

Решение этого уравнения (для минимального значения величины  $-\beta \kappa r$ , соответствующей неустойчивости) сопоставлено в приближенном решении (2.95) на ри-

сунке 42. Нетрудно видеть, что приближенное решение лишь незначительно отличается от точного, особенно при  $v_C^2/v_A^2 \ll 1$ , т.е. для малых значений  $\beta$ , типичных для солнечных корональных арок.

**Альфвеновские собственные моды, антисимметричные относительно экватора.** Главной гармоникой альфвеновской волны, антисимметричной относительно экватора, является  $\Phi_2$ . Таким образом, свертка  $\langle \Theta_N \Phi_2 \rangle$  не равна нулю только для нечетных ММЗ-гармоник  $\Theta_N$ . Для нахождения приближенного значения порога неустойчивости достаточно учесть только главную нечетную гармонику —  $\Theta_1$ . Тогда уравнение (2.89) приводится к виду:

$$\frac{k_{\perp}^2}{k_y^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2 r^2}{v_A^2} \right) \Phi_2 - \beta \kappa r \Phi_2 = 4 \frac{v_c^2}{v_A^2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_{C1}^2} \langle \Theta_1 \Phi_2 \rangle. \quad (2.100)$$

Умножая это выражение на  $\Phi_2$  и интегрируя по углу, мы получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{k_{\perp}^2}{k_y^2} (\omega^2 - \Omega_{A2}^2) - \beta \frac{\kappa v_A^2}{r} = 4 \frac{v_c^2}{r^2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_{C1}^2} \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2. \quad (2.101)$$

В антисимметричном случае альфвеновский и ММЗ-резонансы (когда  $k_r \rightarrow \infty$ ) имеют место при частотах  $\Omega_{A2}$  и  $\Omega_{C1}$ , соответственно. Поверхности отражения (когда  $k_r \rightarrow 0$ ) в этом случае определяются из условия

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ (\Omega_{A2}^2 + \Omega_{C1}^2 + H) \pm \sqrt{D} \right], \quad (2.102)$$

где

$$H = \beta \frac{\kappa v_A^2}{r} + \frac{4v_c^2}{r^2} \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2, \quad (2.103)$$

и

$$D = (\Omega_{A2}^2 - \Omega_{C1}^2 + H)^2 + \frac{v_c^2}{r^2} \left( \frac{32}{3\pi} \right)^2 \Omega_{C1}^2. \quad (2.104)$$

Неустойчивость по прежнему развивается на низкочастотной ветви (решение уравнения (2.102), соответствующее знаку “−”). Условие неустойчивости имеет вид

$$(\Omega_{A2}^2 + \Omega_{C1}^2 + H) - \sqrt{D} < 0,$$

который после преобразований приводится к виду

$$\beta k r < -4. \quad (2.105)$$

Инкремент неустойчивости равен

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{D} - (\Omega_{A2}^2 + \Omega_{C1}^2 + H) \right]^{1/2}. \quad (2.106)$$

**Общие свойства неустойчивости для симметричных и антисимметричных мод.** В обоих случаях симметричных и антисимметричных мод дискриминант  $D$ , входящий в выражения для частоты отражения (2.92) и (2.102), является положительно определенной величиной. Следовательно, в полном соответствии с известной теоремой магнитной гидродинамики [Кадо́мцев, 1963; Frieman and Rotenberg, 1960], квадрат частоты волны является величиной реальной.

С уменьшением величины  $\beta$ , в обоих случаях величина частоты отражения  $\Omega_-$  стремится к частоте ММЗ-резонанса ( $\Omega_{C2}$  либо  $\Omega_{C1}$ ), в то время как частота  $\Omega_+$  стремится к альфвеновской резонансной частоте ( $\Omega_{A1}$  либо  $\Omega_{A2}$ ). Поскольку неустойчивость развивается при  $\Omega_-^2 < 0$ , отсюда следует, что неустойчивость имеет место только на ММЗ-ветви колебаний. Это соответствует результатам работ [Мазур и др., 2012; Kozlov et al., 2014]. Однако порог неустойчивости определяется сцеплением ММЗ с альфвеновской волной. Как видно из выражений (2.95) и (2.105), при небольших значениях  $\beta$  порог неустойчивости ниже для симметричных альфвеновских мод, чем для антисимметричных.

### 2.3.4 Радиальная структура неустойчивых мод

До сих пор мы рассматривали предел  $k_r/k_y \rightarrow 0$ , обычно изучаемый в теории баллонной неустойчивости. Для произвольных значений  $k_r/k_y$  решение уравнений (2.91) и (2.101) может быть представлено в виде

$$k_r^2(r, \omega) = -k_y^2 \left( \frac{\omega^2 - \Omega_-^2(r)}{\omega^2 - \Omega_C^2(r)} \right) \left( \frac{\omega^2 - \Omega_+^2(r)}{\omega^2 - \Omega_A^2(r)} \right). \quad (2.107)$$

В симметричном случае в качестве  $\Omega_C$  следует подставить величину  $\Omega_{C2}$ , и в качестве  $\Omega_A$  следует подставить  $\Omega_{A1}$ . В антисимметричном случае, в качестве  $\Omega_C$

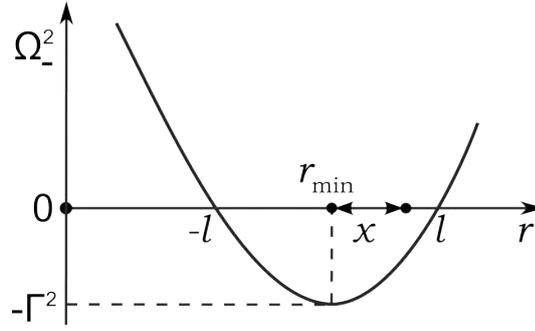


Рисунок 43. Поведение функции  $\Omega_-^2(r)$  в окрестности ее минимума.

следует подставить величину  $\Omega_{C1}$ , и в качестве  $\Omega_A$  следует подставить  $\Omega_{A2}$ . Как видно из формул (2.92) и (2.102), выполняется неравенство  $\Omega_- < \Omega_C$ . Таким образом, нижняя частота отражения всегда меньше частоты ММЗ-резонанса. Однако верхняя частота отражения  $\Omega_+$  может быть как больше, так и меньше частоты альфвеновского резонанса  $\Omega_A$ , в зависимости от профилей  $\beta(r)$ ,  $\kappa(r)$  и  $B(r)$ .

При небольших значениях  $\beta$  частоты  $\Omega_A$  и  $\Omega_+$  всегда выше частот  $\Omega_-$  и  $\Omega_C$ . Тогда в области неустойчивости уравнение (2.107) может быть записано в упрощенном виде:

$$k_r^2(r, \omega) = -K^2 \frac{\omega^2 - \Omega_-^2(r)}{\omega^2 - \Omega_C^2(r)}. \quad (2.108)$$

Здесь обозначено  $K = (\Omega_+/\Omega_A) k_y$ . Поскольку при  $\beta < 1$  величины  $\Omega_+$  и  $\Omega_A$  не сильно отличаются друг от друга, значение  $K$  по порядку величины совпадает с  $k_y$ .

Поскольку неустойчивость может развиваться при малых (более того, отрицательных) значениях  $\Omega_-^2(r)$ , предположим, что функция  $\Omega_-^2(r)$  достигает минимума при некотором значении  $r = r_{\min}$  (рис. 43). Вблизи магнитной поверхности  $r = r_{\min}$  функцию  $\Omega_-^2(r)$  можно разложить в ряд Тейлора,

$$\Omega_-^2 \approx -\Gamma^2 \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right), \quad (2.109)$$

где обозначено  $x = r - r_{\min}$ ,  $\Gamma^2 = -\Omega_-^2(r_{\min})$ , и  $l$  — некоторая константа, связанная с радиальным масштабом неоднородности плазмы и магнитного поля  $L$  (см. рис. 43). Область, где выполняется неравенство  $\Omega_-^2 < 0$ , в дальнейшем будет называться областью неустойчивости. как видно из уравнения (2.109), ширина этой области примерно равна  $2l$ .

Величина  $\Gamma$  в формуле (2.109) характеризует инкремент неустойчивости. Она может быть оценена исходя из формул (2.92, 2.102):

$$\Gamma \approx \frac{v_s}{\sqrt{r_{\min} l}}, \quad (2.110)$$

радиус кривизны силовой линии при радиальной координате  $r = r_{\min}$  обозначен  $r_{\min}$ .

Поскольку в случае неустойчивости частота волны является чисто мнимой величиной, мы можем обозначить  $\omega^2 = -\gamma^2$ , где  $\gamma^2 > 0$ . Тогда уравнение (2.108) может быть переписано в виде

$$k_r^2(r, \gamma) \approx \frac{K^2}{\gamma^2 + \Omega_C^2} \left( \Gamma^2 - \gamma^2 - \Gamma^2 \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (2.111)$$

Введем обозначение

$$\Delta^2 = l^2 \frac{\Gamma^2 - \gamma^2}{\Gamma^2} \quad (2.112)$$

(заметим, что величина  $\Delta$  является функцией инкремента  $\gamma$ ). Тогда уравнение (2.111) сведется к виду

$$k_r(r, \gamma) \approx \frac{K}{l} \frac{\Gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \Omega_C^2}} \sqrt{\Delta^2 - x^2}. \quad (2.113)$$

Из этого выражения видно, что  $\Delta$  имеет смысл радиальной координаты поверхности отражения, где  $k_r = 0$ . Таким образом, мода заперта по радиальной координате между магнитными поверхностями с координатами  $r_{\pm} = r_{\min} \pm \Delta$  (точки поворота). Поскольку мы интересуемся главным образом оценками по порядку величины, вариацией частоты ММЗ-резонанса  $\Omega_C$  поперек магнитных оболочек в области неустойчивости будем пренебрегать.

В области локализации моды, ограниченной двумя точками поворота, радиальная компонента волнового вектора удовлетворяет правилу квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\int_{r_-}^{r_+} k_r(r, \gamma) dr = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.114)$$

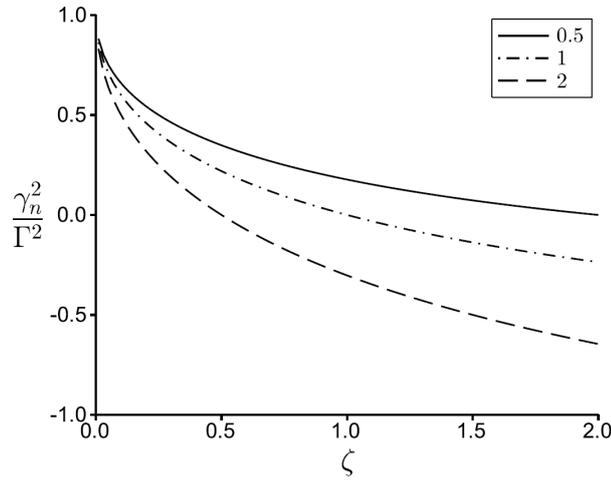


Рисунок 44. Зависимость квадрата нормализованного инкремента от параметра  $\zeta = (2n + 1)/(Kl)$  для значений  $\Omega_C^2/\Gamma^2 = 0.5, 1, \text{ и } 2$ .

где  $n$  — целое число, соответствующее номеру радиальной гармоники. Подставляя  $k_r$  из (2.113) в (2.114) и вычисляя интеграл, получаем

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{\Gamma^2 - \gamma_n^2}{\sqrt{\gamma_n^2 + \Omega_C^2}} = \frac{2n + 1}{Kl}, \quad (2.115)$$

где  $\gamma_n$  — инкремент неустойчивости  $n$ -ой радиальной гармоники. Решение этого уравнения имеет вид

$$\gamma_n^2 = \Gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{2}\zeta^2 - \sqrt{D_1} \right), \quad (2.116)$$

где

$$\zeta = \frac{2n + 1}{Kl}, \quad \text{and} \quad D_1 = \left( 1 + \frac{1}{2}\zeta^2 \right)^2 - 1 + \frac{\Omega_C^2}{\Gamma^2} \zeta^2.$$

Зависимость инкремента от параметра  $\zeta$  проиллюстрирована на рисунке 44. Заметим, что дискриминант  $D_1$  всегда положителен. Как видно из рисунка, возмущения с короткими длинами волн в направлении  $y$  (вдоль оси арки) наиболее неустойчивы.

В области неустойчивости, при условии

$$Kl \gg 1, \quad (2.117)$$

соответствующему возмущениям с очень короткими длинами волн вдоль арки и малым значениям  $n$ , решение уравнения (2.115) может быть приближенно записано

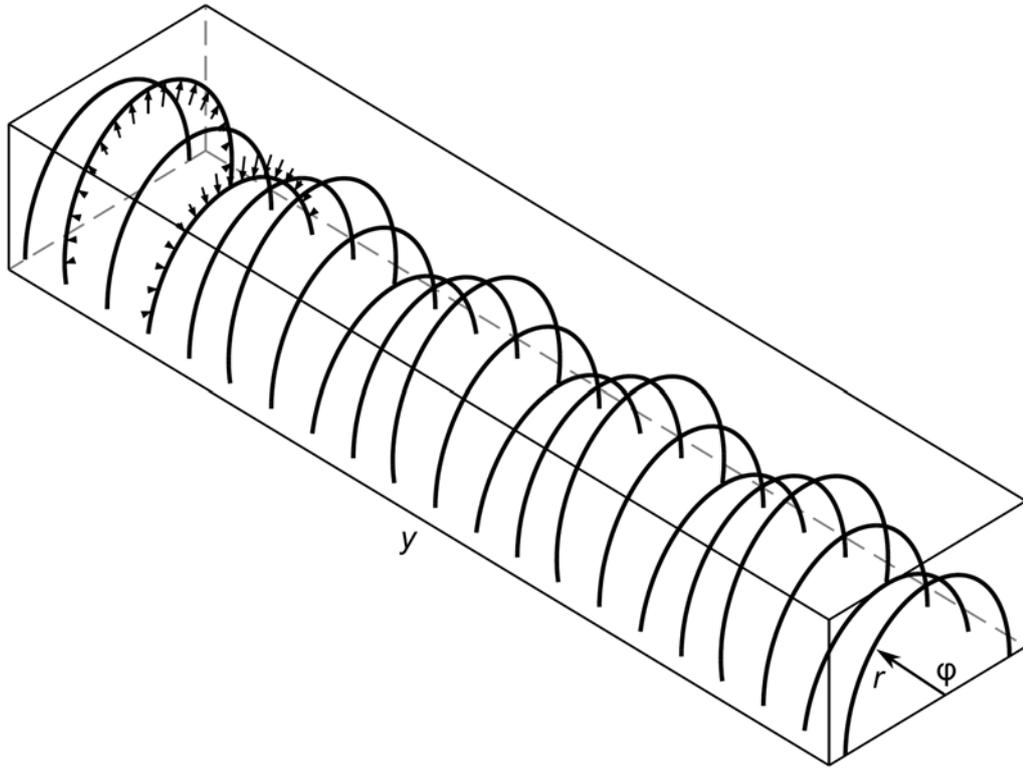


Рисунок 45. Схематическое изображение корональной арки при условии “гофрированной” неустойчивости. Стрелки показывают неустойчивые магнитные трубки — «языки».

в виде

$$\gamma_n^2 \approx \Gamma^2 \left( 1 - \frac{2n+1}{Kl} \sqrt{1 + \frac{\Omega_C^2}{\Gamma^2}} \right). \quad (2.118)$$

Таким образом, для низких радиальных гармоник ( $n \approx 1$ ) и значений  $Kl \gg 1$ , величина  $\gamma_n^2$  имеет тот же знак, что и  $\Gamma^2$ , т.е. является положительной. В этом случае имеет место неустойчивость. Следовательно, условия неустойчивости определяются неравенствами (2.95) или (2.105) и (2.117). При этом длины волн неустойчивых возмущений вдоль оси арки много меньше ее радиуса, так что неустойчивые возмущения имеют “гофрированную” пространственную структуру, как показано на рисунке 45.

Однако есть и еще одно условие неустойчивости. Действительно, различные радиальные гармоники имеют различные инкременты. По порядку величины, раз-

личие инкрементов для гармоник с двумя близкими номерами  $n$  есть

$$\Delta\gamma_n \approx \frac{\Gamma}{Kl} \approx \frac{v_s}{Kl\sqrt{Rl}},$$

где  $R$  — радиус арки. Но для достаточно больших номерах  $n$  величина  $\gamma_n^2$  становится отрицательной, так что неустойчивость пропадает. Таким образом, условия неустойчивости (2.95) или (2.105) и (2.117) должны быть дополнены неравенством

$$n < n_{\text{cr}}, \quad (2.119)$$

где  $n_{\text{cr}}$  — критическое значение радиального волнового числа, которое может быть оценено с помощью формулы (2.116):

$$n_{\text{cr}} = \frac{1}{2} \left( Kl \frac{\Gamma}{\Omega_C} - 1 \right) \approx \frac{1}{2} Kl \frac{\Gamma}{\Omega_C}. \quad (2.120)$$

Условие неустойчивости (2.119) имеет достаточно простой смысл.

Во-первых, как видно из уравнения (2.112), для неустойчивых возмущений ( $\gamma_n^2 > 0$ ) должно выполняться неравенство  $\Delta < l$ . Как следует из уравнения (2.109), этот режим может существовать только в том случае, если точки поворота расположены внутри области, где квадрат частоты отражения отрицателен:  $\Omega_-^2 < 0$ . Таким образом, в области неустойчивости расположена только центральная часть резонатора.

Во-вторых, характерное значение радиальной компоненты волнового вектора, соответствующее критическому значению радиального волнового числа  $n_{\text{cr}}$ , может быть оценено как  $k_r \approx n_{\text{cr}}/l$ . С помощью уравнения (2.120) можно оценить отношение радиальной и  $y$ -компонент волнового вектора как

$$\frac{k_r}{k_y} \sim \frac{1}{2} \frac{|\Omega_-|}{\Omega_C} \frac{\Omega_+}{\Omega_A}. \quad (2.121)$$

Поскольку  $\Gamma \approx \Omega_C$  и  $\Omega_+ \approx \Omega_A$ , для устойчивых мод с  $n \gg n_{\text{cr}}$  выполняется неравенство  $k_r \gg k_y$ . Отношение поперечных компонент возмущения магнитного поля выражается как  $|b_r/b_y| \approx k_y/k_r$ . Таким образом, в устойчивом режиме магнитное поле осциллирует главным образом вдоль оси цилиндра,  $b_r \ll b_y$ , в то время как в неустойчивом случае — в радиальном направлении,  $b_r \gg b_y$ . Это согласуется с

результатами более ранних работ [Agaritov et al., 2008; Мазур и др., 2012]. Ввиду вмороженности магнитного поля в том же направлении колеблется и плазма. Возмущения такого типа могут быть названы ”языками”.

## 2.4 Выводы к Главе 2

Перечислим основные результаты, полученные в данной главе.

1. Изучены моды УНЧ-колебаний в неоднородной намагниченной плазме с высоким содержанием тяжелых ионов. Примером такой среды является магнитосфера Меркурия, где роль тяжелых ионов играют ионы натрия. Показано, что имеются две моды колебаний, названные направленной и изотропной. Эти моды напоминают альфвеновскую и быструю магнитозвуковую моды в земной магнитосфере, но обладают рядом отличительных особенностей. Главной из них является возможность сцепления мод даже для азимутально-симметричных возмущений ( $m = 0$ ). В магнитосфере Меркурия за сцепление отвечают недиагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости, связанные с конечным отношением частоты колебаний к гирочастоте тяжелых ионов. В частном случае одномерно-неоднородной плазмы показано существование волнового резонанса, аналогичного альфвеновскому резонансу в одножидкостном МГД-приближении. Сингулярные решения демонстрируют колебательное поведение вблизи особой точки. Установлено, что резонансные УНЧ-колебания в магнитосфере Меркурия должны быть отождествлены с ионно-ионной гибридной модой.

2. Изучена структура медленной магнитозвуковой (ММЗ) моды, сцепленной с альфвеновской модой из-за кривизны силовых линий в аксиально-симметричной магнитосфере. Благодаря этому сцеплению ММЗ распространяется поперек магнитных оболочек. Обнаружено, что ММЗ заперта между двумя магнитными оболочками, на одной из которых имеется резонанс, на второй — отсечка. На этих поверхностях радиальная составляющая волнового вектора стремится к бесконечности и к нулю соответственно. Резонансная поверхность находится дальше от Земли, чем поверхность отсечки. Ввиду малого значения скорости звука вблизи

экватора резонансная частота ММЗ намного ниже, чем у альфвеновской моды. Максимум амплитуды медленной моды, выраженный в терминах параллельного магнитного поля, сосредоточен вблизи экватора, но выраженный в гидромагнитных терминах, сосредоточен вблизи ионосферы.

3. Изучено поведение линейных МГД-возмущений корональной аркады, моделируемой полуцилиндром с азимутальным магнитным полем и неоднородными радиальными профилями давления, температуры и поля плазмы. Эти моды представлены сцепленными альфвеновскими и ММЗ-колебаниями. Рассмотрены возмущения с короткими продольными (в направлении вдоль аркады) длинами волн. Радиальная структура возмущений определяется радиальными профилями равновесных величин. Определены условия для гофрировочной неустойчивости корональной аркады. Установлено, что инкремент неустойчивости увеличивается с уменьшением продольной длины волны и радиального волнового числа. Радиальные возмущения магнитного поля создают гофрированную рябь аркады в продольном направлении. Для корональных условий время роста неустойчивости короче одной минуты и уменьшается с повышением температуры.

Основное содержание этой главы основано на публикациях из списка в разделе «Общая характеристика работы»: [3, 4, 5, 10, 13, 20].

## Глава 3

# Сцепление альфвеновской и компрессионной мод: кинетическое рассмотрение

Поскольку магнитосферная плазма является бесстолкновительной, применимость МГД для ее описания стоит под вопросом. Более адекватным описанием магнитосферной плазмы, особенно при конечном давлении, является кинетический подход. Важным результатом кинетики является существование мод колебаний, которым нет аналога в МГД — зеркально-дрейфовой [Tajiri, 1967; Hasegawa, 1969] и дрейфово-компрессионной [Rosenbluth, 1981; Ng et al., 1984]. Ввиду неоднородности плазмы и магнитного поля эти моды сцеплены с альфвеновской [Lin and Parks, 1978; Woch et al., 1988]. Рассмотрение эффектов этого сцепления является предметом настоящей главы.

### 3.1 Альфвеновская и дрейфово-компрессионная моды

Дрейфово-компрессионная мода является наиболее общей компрессионной модой в кинетике: для ее существования необходима только неоднородность плазмы [Rosenbluth, 1981]. С этой модой часто отождествляют компрессионные буревые пульсации  $Pc5$  в магнитосфере [Crabtree and Chen, 2004]. Отдельные аспекты сцепления этих мод с альфвеновскими изучались в 1980-е годы [Patel and Migliuolo,

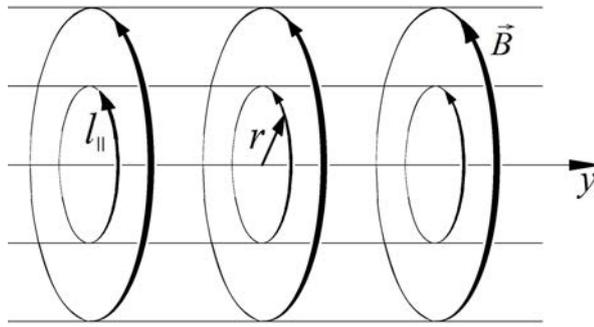


Рисунок 46. Цилиндрическая модель магнитосферы

1980; Patel et al., 1984], но полной картины этого явления пока не существует. Здесь мы продолжим эту работу.

### 3.1.1 Основные уравнения

Рассмотрим цилиндрическую модель магнитосферы, где магнитные силовые линии имеют постоянный радиус кривизны  $R$  (рис. 46). Радиус кривизны играет роль радиальной координаты  $x$ . Все равновесные параметры (концентрация  $n$ , температура  $T$ , равновесное магнитное поле  $B$ ) меняются только поперек магнитных оболочек. В этой модели магнитосфера и плазма считается 1-мерно неоднородными, силовые линии имеют форму концентрических окружностей, магнитные поверхности имеют вид вложенных друг в друга концентрических цилиндров, все равновесные параметры зависят только от расстояния от оси цилиндров. Безусловно, эта модель является слишком упрощенной, поскольку не принимает во внимание неоднородность плазмы и магнитного поля вдоль силовых линий и, особенно, наличие плотной высокопроводящей ионосферы. Тем не менее, такая модель принимает во внимание такие базовые особенности магнитосферы, как кривизна силовых линий и неоднородное плазменное давление, и поэтому можно полагать, что она адекватно описывает основные свойства УНЧ-мод.

Отношение плазменного давления к магнитному  $\beta \sim 1$ , но в плазме имеется популяция холодных электронов, чья высокая подвижность вдоль силовых линий обеспечивает равенство нулю продольной компоненты электрического поля волны ( $E_{||} = 0$ ). Предполагается, что равновесная функция распределения  $F$  максвеллов-

ская,

$$F = \frac{n}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-\varepsilon/T}, \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon = v^2/2$  есть энергия в расчете на единицу массы. Анизотропия давления плазмы не принимается во внимание, т.е. предполагается равенство продольной и поперечной температур. Условие равновесия неподвижной плазмы предполагает, что градиент полного давления плазмы (суммы газового  $P$  и магнитного  $B^2/8\pi$  давлений) уравновешен натяжением силовых линий:

$$\nabla \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{B^2}{4\pi} (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{e},$$

где  $\vec{e} = \vec{B}/B$  — единичный вектор вдоль направления магнитного поля. В цилиндрической геометрии это выражение удобно переписать в виде

$$\frac{4\pi P'}{B^2} = -\frac{B'}{B} - \frac{1}{R} \quad (3.2)$$

или

$$(\beta/2)\kappa_P + \kappa_B + \kappa_R = 0, \quad (3.3)$$

где  $\kappa_B = B'/B$  и  $\kappa_P = P'/P$  представляют собой нормализованные градиенты магнитного поля и давления,  $\kappa_R = R^{-1}$  — кривизна силовых линий, штрих означает дифференцирование по радиальной координате  $x$ .

Зависимость возмущенных величин от пространственно-временных координат предполагается в виде

$$\exp[-i\omega t + ik_y y + i \int k_x(x) dx + ik_{\parallel} l_{\parallel}],$$

where  $y$  и  $l_{\parallel}$  — соответственно, азимутальная координата и продольная координаты,  $k_x$  — радиальная компонента волнового вектора (определяемая из старшего порядка ВКБ-приближения). Азимутально-мелкомасштабный предел соответствует неравенству  $k_{\parallel}^2 \ll k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

При  $E_{\parallel} = 0$  электромагнитное поле волны определяется двумя переменными. Первая из них  $b = \omega B_{\parallel}/c$  пропорциональна продольному магнитному полю волны  $B_{\parallel}$  [Chen and Hasegawa, 1991]. Вторая переменная  $\psi$ , определяется через продольный вектор-потенциал как  $A_{\parallel} = -(ic/\omega)\partial\psi/\partial l_{\parallel}$ , где  $\omega$  — частота волны; в гирокинетике предполагается нормировка  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  [Antonsen and Lane, 1980], так что

поперечный вектор-потенциал мал по сравнению с продольным  $A_{\perp} = (k_{\parallel}/k_{\perp})A_{\parallel}$ . Поскольку  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  и  $A_{\perp} \ll A_{\parallel}$ , компоненты поперечного магнитного поля выражаются в виде

$$B_x = \frac{ck_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} \psi, \quad B_y = -\frac{ck_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \psi. \quad (3.4)$$

Уравнения gyroкинетики из работ [Catto et al., 1981; Antonsen and Lane, 1980] могут быть записаны в более удобном виде

$$L_M b + k_y L_c \psi = 0, \quad (3.5)$$

$$L_A \psi + k_y L_c b = 0 \quad (3.6)$$

[Chen and Hasegawa, 1991]. Здесь оператор компрессионной моды есть

$$L_M = -1 - a_M, \quad (3.7)$$

где

$$a_M = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \frac{2\pi}{k_{\perp}^2} \sum_{e,i} \frac{q^2}{m} \int dv_{\parallel} dv_{\perp} v_{\perp}^3 J_1^2(\xi) \hat{Q}F, \quad (3.8)$$

где  $\xi = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_c$  — аргумент функции Бесселя  $J_1$ ,

$$\hat{Q}F = \frac{1}{k_{\parallel} v_{\parallel} - (\omega - \omega_d)} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{k_y F'}{\omega \omega_c} \right), \quad (3.9)$$

и

$$\omega_d = \frac{k_y}{\omega_c} \left( \frac{B'_0}{2B_0} v_{\perp}^2 - \frac{v_{\parallel}^2}{R} \right)$$

— частота дрейфа в неоднородном магнитном поле. Далее, оператор альфвеновской моды записывается в виде

$$L_A = (k_x^2 + k_y^2) \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel}^2 \right) + k_y^2 \frac{4\pi P'}{B_0^2} \left( \frac{B'_0}{B_0} - \frac{1}{R} \right) + a_A, \quad (3.10)$$

где

$$a_A = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} 2\pi\omega \sum_{e,i} \frac{q^2}{m} \int dv_{\parallel} dv_{\perp} v_{\perp} \left( \frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 J_0^2(\xi) \hat{Q}F. \quad (3.11)$$

Наконец, оператор сцепления мод есть

$$L_c = \frac{4\pi P'}{B_0^2} - a_c, \quad (3.12)$$

$$a_c = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \frac{2\pi}{k_\perp} \sum_{e,i} \frac{q^2}{m} \int dv_\parallel dv_\perp v_\perp^2 J_0(\xi) J_1(\xi) \frac{\omega_d}{\omega} \hat{Q}F. \quad (3.13)$$

Члены  $a_M, a_A, a_c$  отвечают за взаимодействие волна-частица.

Введем диамагнитную дрейфовую частоту

$$\omega_* = \frac{k_y n'}{\omega_c n} T \left( 1 - \frac{3}{2} \eta \right), \quad (3.14)$$

где

$$\eta = \frac{T' n}{n' T}.$$

Другие характеристические частоты

$$\tilde{\omega}_* = \frac{k_y T'}{\omega_c}$$

и

$$\Omega_d = \frac{k_y T}{\omega_c} \left[ \left( \frac{B'}{B} + \frac{2}{R} \right) \lambda - \frac{2}{R} \right],$$

где  $\lambda = v_\perp^2/v^2$ . Рассмотрим предел квази-МГД, когда  $\Omega_d/\omega \ll 1$ ,  $\xi \ll 1$  and  $\omega, \Omega_d \gg k_\parallel V_\parallel$ . Тогда операторы могут быть переписаны в виде

$$L_A = k_x^2 L_T + k_y^2 L_P, \quad (3.15)$$

$$L_c = \frac{4\pi P'}{B^2} - \beta \frac{\omega - \omega_*}{\omega} \left( \frac{B'}{B} - \frac{1}{2R} \right) + i\beta\Gamma_c, \quad (3.16)$$

$$L_M = -1 - \beta \frac{\omega - \omega_*}{\omega} + i\beta\Gamma_M. \quad (3.17)$$

Операторы

$$L_T = \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_\parallel^2 \right), \quad (3.18)$$

и

$$L_P = \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_\parallel^2 \right) + \frac{4\pi P'}{B^2} \left( \frac{B'}{B} - \frac{1}{R} \right) - \beta \frac{\omega - \omega_*}{\omega} \left( \frac{B'^2}{B^2} - \frac{B'}{BR} + \frac{3}{2R^2} \right) + i\beta\Gamma_A, \quad (3.19)$$

будем называть тороидальным и полоидальным, соответственно. Мнимые слагаемые есть

$$\Gamma_A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \left( \frac{\omega - \omega_*}{\omega} - \frac{\tilde{\omega}_*}{\Omega_d} \right) \left( \frac{\omega}{\Omega_d} \right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{\omega}{\Omega_d}} \left[ \left( \frac{B'}{B} + \frac{2}{R} \right) \lambda - \frac{2}{R} \right]^2, \quad (3.20)$$

$$\Gamma_c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \left( \frac{\omega - \omega_*}{\omega} - \frac{\tilde{\omega}_*}{\Omega_d} \right) \left( \frac{\omega}{\Omega_d} \right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{\omega}{\Omega_d}} \left[ \left( \frac{B'}{B} + \frac{2}{R} \right) \lambda - \frac{2}{R} \right], \quad (3.21)$$

$$\Gamma_M = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \left( \frac{\omega - \omega_*}{\omega} - \frac{\tilde{\omega}_*}{\Omega_d} \right) \left( \frac{\omega}{\Omega_d} \right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{\omega}{\Omega_d}}. \quad (3.22)$$

Давление электронной компоненты считаем пренебрежимо малым. Здесь предполагается, что  $\Omega_d > 0$ , т.е. азимутальная компонента волнового вектора  $k_y$  отрицательна. В противоположном случае операторы имели бы только реальную часть: эффективный обмен энергией между волнами и частицами может существовать только в случае, когда фазовая скорость волны сонаправлена с дрейфом в неоднородном магнитном поле.

Выражая  $b$  из (2.66) и подставляя в (3.6), получаем дисперсионное уравнение, описывающее сцепленные альфвеновские и дрейфово-компрессионные моды в 1-мерно неоднородной плазме:

$$(k_x^2 L_T + k_y^2 L_P) \psi - k_y^2 \frac{L_c^2}{L_M} \psi = 0. \quad (3.23)$$

Если неоднородность слаба, уравнение (3.23) сводится к дисперсионному уравнению альфвеновской волны:  $k_{\perp}^2 (\omega^2 - k_{\parallel}^2 v_A^2) = 0$ . Уравнение для компрессионной моды принимает вид  $(1 + \beta)b = 0$  и имеет только тривиальное решение  $b = 0$ , означающее отсутствие компрессионной моды (напомним, что речь идет об азимутально-мелкомасштабном случае, когда БМЗ отсутствует). Однако если мы учтем диамагнитный дрейф (но по-прежнему будем пренебрегать сцеплением с альфвеновской модой), то у уравнения (3.5) появится нетривиальное решение с частотой

$$\text{Re } \omega = \omega_* \frac{\beta}{1 + \beta}. \quad (3.24)$$

Мода, определяемая этим соотношением, и носит название дрейфово-компрессионной (ДК) моды. У ДК-моды есть также мнимая часть частоты

$$\text{Im } \omega = \omega_* \Gamma_M \frac{\beta^2}{(1 + \beta)^2}. \quad (3.25)$$

Обратим внимание на важное сходство альфвеновской и ДК-моды: частота не зависит от радиальной компоненты волнового вектора (хотя во втором случае она пропорциональна азимутальной компоненте благодаря множителю  $\omega_*$ ).

Если частоты имеющие чисто кинетическую природу частоты стремятся к нулю,  $\omega_* = \tilde{\omega}_* = \Omega_d = 0$ , уравнение (3.23) приводится к виду

$$[k_x^2 L_T + k_y^2 L_P^{(mhd)}] \psi = 0, \quad (3.26)$$

где тороидальный оператор по прежнему определяется соотношением (3.18), в то время как полоидальный оператор записывается в виде

$$L_P^{(mhd)} = \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel}^2 \right) + \left[ -\frac{2}{R} \left( \frac{4\pi P'}{B^2} + \frac{7\beta}{4R} \right) + \left( \frac{3}{2R} \right)^2 \frac{\beta^2}{1+\beta} \right]. \quad (3.27)$$

Обратим внимание, что он целиком определяется через гидромагнитные величины (отсюда и верхний индекс *mhd*).

Перейдем к рассмотрению изменений, вносимых эффектом, выходящим за рамки идеальной МГД — диамагнитным дрейфом (величина  $\omega_*$  конечна).

### 3.1.2 Области локализации альфвеновской и дрейфово-компрессионной мод

Поскольку все слагаемые в (3.23) зависят от радиальной координаты  $x$ , это уравнение в конечном итоге описывает зависимость радиальной компоненты волнового вектора  $k_x(x)$  от радиальной координаты (и от частоты  $\omega$  как от параметра):

$$k_x^2 = -k_y^2 \frac{L_P L_M - L_c^2}{L_T L_M}. \quad (3.28)$$

Таким образом, дисперсионное уравнение следует понимать как главный порядок ВКБ-приближения системы дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное поле волны. Особый интерес представляют области прозрачности, где квадрат радиальной компоненты волнового вектора положителен ( $k_x^2 > 0$ ). Именно в этих областях локализованы волны.

Если известны области прозрачности, с помощью решения уравнений (3.4) и (3.5) или (3.6) возможно определить отношение поперечной компоненты магнитного поля волны к продольной. Далее, нетрудно видеть, что поперечные компоненты связаны между собой соотношением  $B_x/B_y = -k_y/k_x$ , где  $k_x$  определяется из

(3.23) как функция радиальной координаты. Таким образом, мы можем определить поляризацию волны в любой точке, где она существует.

Области прозрачности могут быть ограничены магнитными оболочками двумя видами: резонансными поверхностями, где  $k_x \rightarrow \infty$ , и поверхностями отсечки, где  $k_x = 0$ . Для альфвеновской моды эти поверхности обычно носят названия тороидальной и полоидальной поверхностей, соответственно [Leonovich and Mazur, 1993; Klimushkin et al., 2004].

Как видно из уравнения (3.28), существуют две резонансные поверхности, одна из которых определена из условия  $L_T = 0$  и вторая из условия  $L_M = 0$ . Первая из них и есть тороидальная поверхность, которая только что была упомянута. Соответствующее резонансное условие может быть записано в виде  $\omega = \Omega_T(x)$ , где  $\Omega_T(x)$  — тороидальная собственная частота

$$\Omega_T = k_{\parallel} v_A, \quad (3.29)$$

являющаяся функцией радиальной координаты. В большей части земной магнитосферы (за пределами плазмопаузы) она уменьшается с удалением от Земли. Радиальная координата  $x_T$  этой поверхности является решением уравнения  $\omega = \Omega_T(x)$ . Поскольку тороидальная частота пропорциональна  $k_{\parallel}$ , тороидальные поверхности волн с различными продольными волновыми векторами расположены на разных магнитных оболочках.

Вторая резонансная поверхность соответствует случаю  $L_M = 0$ . Отсюда получаем условие резонанса в виде  $\omega = \Omega_M(x)$ , где

$$\Omega_M = \frac{\omega_* \beta}{1 + \beta}. \quad (3.30)$$

Резонансная частота  $\Omega_M$  может быть названа частотой компрессионного резонанса. Как и тороидальная частота, она также является функцией радиальной координаты. Компрессионный резонанс имеет место на координате  $x_M$ , являющейся решением уравнения  $\omega = \Omega_M(x)$ . Вероятно, наиболее типичным поведением функции  $\Omega_M(x)$  является увеличение с расстоянием от Земли, за которым следует уменьшение, так

что имеется максимум при некоторой радиальной координате. В дальнейшем будет предполагаться, что при любых  $x$  имеет место неравенство  $\Omega_T \gg \Omega_M$ .

Важным отличием частоты компрессионного резонанса от альфвеновского является то, что его частота не зависит от параллельного волнового вектора. Это означает, что компрессионные возмущения с различными  $k_{\parallel}$  будут иметь одну и ту же резонансную поверхность, в отличие от резонансных альфвеновских возмущений. Однако частота компрессионного резонанса  $\Omega_M$  зависит азимутального волнового вектора  $k_y$ : если диамагнитная дрейфовая частота  $\omega_*$  (пропорциональная  $k_y$ ) отрицательна, компрессионный резонанс отсутствует.

Переходим к рассмотрению поверхностей отсечки, где выполняется равенство  $k_x = 0$ . В этом случае дисперсионное уравнение сводится к виду

$$L_P L_M - L_c^2 = 0. \quad (3.31)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на предположениях  $\omega_*/k_{\parallel} v_A \ll 1$  и  $(k_{\parallel} R)^{-2} \ll 1$ , позволяющих получить результаты аналитическим путем.

Рассмотрим два случая:  $\omega \sim k_{\parallel} v_A$  and  $\omega \sim \omega_*$ . В первом случае мы получаем из (3.31):

$$\Omega_P^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 + \frac{v_A^2}{R} \left[ \frac{8\pi P'}{B^2} + \frac{7\beta}{2R} - \frac{9}{4R} \frac{\beta^2}{1+\beta} \right]. \quad (3.32)$$

Это выражение совпадает с выражением для полоидальной частоты в МГД при конечном плазменном давлении,  $\beta > 0$ . Радиальная координата  $x_P$  поверхности отсечки является решением уравнения  $\omega = \Omega_P(x)$ .

Слагаемое в квадратных скобках часто называется баллонным членом, так что ветвь колебаний, определяемая дисперсионным уравнением (3.26) часто называется альфвеновской баллонной модой. Влияние баллонного члена может привести к тому, что полоидальная частота может стать мнимой (если  $\Omega_P^2 < 0$ ): это баллонная неустойчивость, хорошо известная из МГД [Агапитов и др., 2006; Parnowski, 2007; Мазур и др., 2012]. Однако сейчас мы рассматриваем случай, когда баллонный член мал по сравнению с  $k_{\parallel}^2 v_A^2$  ввиду предполагаемого неравенства  $(k_{\parallel} R)^{-2} \ll 1$ . Поэтому  $\Omega_P^2 > 0$ , тороидальная и полоидальная частоты незначительно отличаются друг от друга. Без конкретной модели магнитосферы невозможно сказать

однозначно, какая из этих двух частот больше, вычисления в рамках МГД показывают, что в различных случаях обе ситуации возможны [Mager and Klimushkin, 2002; Klimushkin et al., 2004].

Теперь рассмотрим случай  $\omega \sim \omega_*$ . Тогда условие (3.31) записывается в виде

$$-k_{\parallel}^2 + \frac{8\pi P'}{RB^2} - \frac{7}{2R^2}\chi + \frac{9}{4R^2} \frac{\chi^2}{1+\chi} = 0,$$

где обозначено  $\chi = \beta(\omega - \omega_*)/\omega$ . Решение этого уравнения в случае  $(k_{\parallel}R)^{-2} \ll 1$  есть

$$\Omega_R = \Omega_M \left( 1 + \frac{1}{1 + \beta} \frac{9}{4k_{\parallel}^2 R^2} \right). \quad (3.33)$$

Радиальная координата  $x_R$  соответствующей поверхности отсечки является решением уравнения  $\omega = \Omega_R(x)$ .

Как видно из уравнений (3.30, 3.33), всегда  $\Omega_R > \Omega_M$ . Частота отсечки  $\Omega_R$  сравнительно незначительно отличается от резонансной частоты  $\Omega_M$ . Поэтому поверхности  $x_M$  и  $x_R$  должны быть расположены сравнительно недалеко друг от друга.

Таким образом, в бесстолкновительной плазме существует две пары резонансных поверхностей и поверхностей отсечки:

- тороидальная  $x_T$  и расположенная рядом полоидальная  $x_P$  поверхности;
- поверхность компрессионного резонанса  $x_M$  и расположенная рядом поверхность  $x_R$ .

Следовательно, существует две области прозрачности: альфвеновская, ограниченная поверхностями  $x_T$  и  $x_P$ , и дрейфово-компрессионная, ограниченная поверхностями  $x_M$  и  $x_R$ . Следует отметить, что моды, замкнутые в обеих этих областях, имеют и поперечные, и продольные компоненты магнитного поля. Отметим, что понятие компрессионной альфвеновской моды как моды, в основных чертах совпадающей с альфвеновской, но благодаря конечному давлению и неоднородности плазмы имеющей продольную компоненту магнитного поля, было впервые введено в работах [Pokhotelov et al., 1985; Woch et al., 1988]. При этом компрессионная

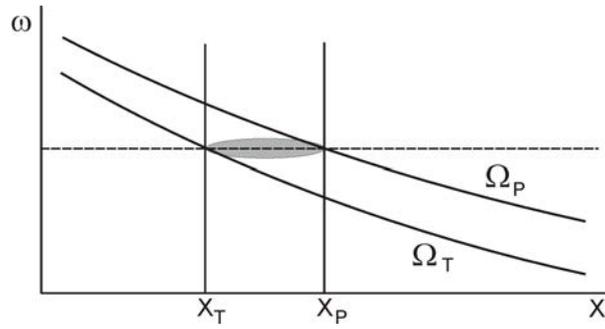


Рисунок 47. Схема зависимости тороидальной и полоидальной альфвеновской частот от радиальной координаты. Серый овал показывает область прозрачности область прозрачности существует только в случае  $\omega_* > 0$ . В противоположном случае,  $\omega_* < 0$ , существует только одна, альфвеновская область прозрачности.

В альфвеновской области прозрачности уравнение (3.28) сводится к виду

$$k_x^2 = k_y^2 \frac{\Omega_P^2(x) - \omega^2}{\omega^2 - \Omega_T^2(x)}. \quad (3.34)$$

Если  $\Omega_P(x) > \Omega_T(x)$  и обе эти функции уменьшаются с ростом  $x$ , то  $x_P(\omega) > x_T(\omega)$  (рис. 47). Поскольку обе функции  $\Omega_P$  и  $\Omega_T$  зависят от радиального волнового вектора, моды с различной пространственной структурой локализованы в разных областях магнитосферы. Однако эти функции не зависят от азимутальной компоненты волнового вектора, поэтому области локализации для разных  $k_y$  одинаковы.

В области прозрачности дрейфово-компрессионной моды уравнение (3.28) записывается в виде

$$k_x^2 = k_y^2 \frac{\Omega_R(x) - \omega}{\omega - \Omega_M(x)}. \quad (3.35)$$

В этом случае  $x_R(\omega) > x_M(\omega)$  если функция  $\Omega_R(x)$  является растущей и  $x_R(\omega) < x_M(\omega)$  в противоположном случае (рис. 48). Поскольку  $\Omega_M$  не зависит от  $k_{||}$ , а зависимость  $\Omega_R$  от  $k_{||}$  достаточно слаба, моды с различными продольными структурами имеют одни и те же области прозрачности. С другой стороны, эти частоты зависят от азимутальной компоненты волнового вектора, поэтому области локализации для разных  $k_y$  различаются.

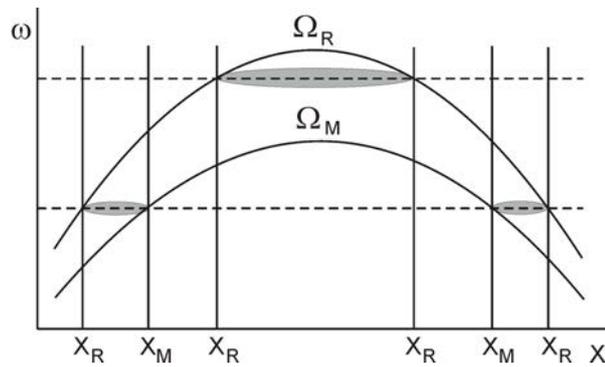


Рисунок 48. Схема зависимости частоты компрессионного резонанса и компрессионной частоты отражения от радиальной координаты. Области прозрачности отмечены серым овалом. Область, ограниченная двумя поверхностями отсечки  $x_R$  — поперечный резонатор для дрейфово-компрессионной моды

### 3.1.3 За пределами ВКБ-приближения: структура вблизи резонансных поверхностей

Бесконечность радиальной компоненты волнового вектора еще не означает бесконечности электрического или магнитного поля волны. Для определения поведения волны вблизи резонансной поверхности необходимо решить дифференциальное уравнение, описывающее структуру волны. Поперечная структура волнового поля в гирокинетике определяется на языке волновых векторов. Результатом является дисперсионное уравнение, представляющее собой главный порядок решения дифференциального уравнения в ВКБ-приближении. Простейшим способом определения дифференциального уравнения было бы заменить  $k_x$  дифференциальным оператором  $-i\partial/\partial x$ . Но такой подход позволяет реконструировать только члены со второй производной по радиальной координате. Однако для определения вида особенности волнового поля члены с первой производной не менее важны.

Однако мы можем воспользоваться помощью 1-жидкостной МГД, где радиальные производные в дифференциальном уравнении имеют вид  $\frac{\partial}{\partial x} L_T \frac{\partial}{\partial x}$  [Leonovich and Mazur, 1993; Климушкин, 1997; Klimushkin et al., 2004]. Это дает главный порядок ВКБ-приближения  $-k_x^2 L_T$ , совпадающий с первым членом уравнения (3.23). Таким образом, мы можем реконструировать волновое уравнение следующим об-

разом:

$$-\frac{d}{dx}L_T\frac{d\psi}{dx} + k_y^2L_P\psi - k_y^2\frac{L_c^2}{L_M}\psi = 0. \quad (3.36)$$

Все операторы здесь являются функциями  $x$  и  $\omega$ . Разумеется, нельзя быть уверенными, что в кинетике не появятся другие члены с первой производной по радиальной координате. Тем не мене, это уравнение может служить по крайней мере стартовой точкой для последующего анализа.

Вблизи тороидальной поверхности главный член этого уравнения есть  $\frac{\partial}{\partial x}L_T\frac{\partial\psi}{\partial x}$ . При  $x \approx x_T$  тороидальный оператор может быть записан в виде

$$L_T = \frac{1}{v_A^2} \left| \frac{d\Omega_T^2(x)}{dx} \right| (x - x_T)$$

и главный член уравнения (3.36) приобретает вид

$$\frac{d}{dx}(x - x_T)\frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Решение этого уравнение приводит к хорошо известной логарифмической особенности

$$\psi = C_1 \ln(x - x_T) + C_2,$$

где  $C_{1,2}$  некоторые постоянные, не равные нулю [Leonovich and Mazur, 1993]. Таким образом, вблизи тороидальной поверхности амплитуда волны стремится к бесконечности. Обе поперечные компоненты магнитного поля волны имеют особенности: радиальная компонента — логарифмическую, и азимутальная — особенность типа полюса.

Вблизи компрессионного резонанса  $x_M$  уравнение (3.36) может быть записано в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_y^2\frac{\Delta\Omega}{\Omega'_M}\frac{1}{x - x_M}\psi = 0, \quad (3.37)$$

где  $\Delta\Omega = \Omega_R(x_M) - \Omega_M(x_M) > 0$ . Его решение есть

$$\psi = \sqrt{\kappa(x - x_M)} \left[ a_1 J_1(2\sqrt{\kappa(x - x_M)}) + a_2 Y_1(2\sqrt{\kappa(x - x_M)}) \right],$$

где  $a_{1,2}$  постоянные,  $J_1$  и  $Y_1$  функции Бесселя, и  $\kappa = k_y^2\Delta\Omega/\Omega'_M$ . При  $x \rightarrow x_M$  получаем асимптотику

$$\psi \approx \frac{a_2}{\pi} [-1 + \kappa(x - x_M) \ln \kappa(x - x_M)].$$

С помощью (3.6) и (3.4) получаем компоненты магнитного поля:

$$B_x \propto \text{const}, \quad B_y \propto \ln \kappa(x - x_M), \quad B_{\parallel} \propto \frac{1}{x - x_M}. \quad (3.38)$$

Таким образом, радиальная компонента магнитного поля волны вблизи компрессионного резонанса конечна, в то время как азимутальная и продольная компоненты имеют логарифмическую и полюсную особенности, соответственно. Интересно, что такое же поведение характерно и для единственной азимутально-мелкомасштабной компрессионной моды в МГД — медленного магнитного звука [Климушкин, 1997; Leonovich et al., 2006]. Тем не менее, к этому результату нужно подходить с осторожностью и воспринимать его только как предварительный.

### 3.1.4 Альфвеновские неустойчивости при учете сцепления с компрессионной модой

Влияние сцепления с компрессионными модами на альфвеновские неустойчивости — практически неизученный вопрос. В этом разделе мы рассмотрим этот вопрос на примере цилиндрической модели магнитосферы, где силовые линии имеют постоянный радиус кривизны  $R$  и все равновесные параметры (концентрация  $n$ , температура  $T$ , равновесное магнитное поле  $B$ ) меняются только поперек магнитных оболочек.

**Неустойчивость сцепленных альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод.** В разделе 3.1 было получено дисперсионное уравнение сцепленных альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод (3.23), содержащее мнимые части  $\Gamma_A$ ,  $\Gamma_c$ ,  $\Gamma_M$  (3.20–3.22), возникающие из-за дрейфового резонанса волна-частица. Эти добавки приводят к возникновению мнимой части частоты волны, т.е. к ее неустойчивости или затуханию.

В частности, в альфвеновской области прозрачности, где  $\omega \sim k_{\parallel} v_A \gg \omega_*$ , мнимая часть уравнения (3.23) дает инкремент

$$\gamma_A = -\frac{k_y^2 v_A^2}{k_{\perp}^2 2\omega} \beta \left[ \Gamma_A + \Gamma_c \left( \frac{8\pi P'}{B^2} + \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{3}{R} \right) + \Gamma_M \frac{9}{4R^2} \frac{\beta}{(1 + \beta)^2} \right], \quad (3.39)$$

где слагаемые  $\Gamma_{A,c,M}$  имеют вид

$$\Gamma_A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_*}{\Omega_d}\right) \left(\frac{\omega}{\Omega_d}\right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{\omega}{\Omega_d}} \left[\left(\frac{B'}{B} + \frac{2}{R}\right)\lambda - \frac{2}{R}\right]^2, \quad (3.40)$$

$$\Gamma_c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_*}{\Omega_d}\right) \left(\frac{\omega}{\Omega_d}\right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{\omega}{\Omega_d}} \left[\left(\frac{B'}{B} + \frac{2}{R}\right)\lambda - \frac{2}{R}\right], \quad (3.41)$$

$$\Gamma_M = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_*}{\Omega_d}\right) \left(\frac{\omega}{\Omega_d}\right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{\omega}{\Omega_d}}. \quad (3.42)$$

Критерий неустойчивости может быть легко найден в случае  $\beta \ll 1$ : это  $\Gamma_A < 0$ , или

$$\tilde{\omega}_* > \langle \Omega_d \rangle, \quad (3.43)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение в соответствии с (3.40). Это означает что обе величины —  $\tilde{\omega}_* = k_y T' / \omega_c$  и  $\langle \Omega_d \rangle$  — должны иметь одинаковый знак. С другой стороны, взаимодействие волна-частица возможно только если  $\Omega_d > 0$ , что означает  $k_y < 0$ . Таким образом, необходимым условием неустойчивости является уменьшение температуры с расстоянием:  $T' < 0$ . Это согласуется с результатом, полученным в работе [Михайловский и Фридман, 1967].

Когда  $\beta \sim 1$ , вступают в игру слагаемые, связанные со сцеплением мод (т.е. слагаемые пропорциональные  $\Gamma_c$  и  $\Gamma_M$ ). Член  $\Gamma_M$  отрицателен при тех же самых условиях, что и член  $\Gamma_A$ , поэтому он работает в том же направлении. Что касается члена  $\Gamma_c$ , то он отрицателен при условии (3.43) поскольку выражение в скобках в (3.41) всегда отрицательно. Однако он вряд ли может изменить условие неустойчивости поскольку член  $\Gamma_c$  домножен на градиент давления, который обычно отрицателен в регионах плазмы где  $\beta \sim 1$ .

Другой интересной особенностью является сильная зависимость инкремента от радиальной координаты, выражаемая фактором  $k_y^2 / k_\perp^2$  в (3.39). Это означает, что инкремент имеет максимум на полоидальной поверхности и убывает до нуля на тороидальной поверхности. Однако всегда есть затухание из-за конечной проводимости ионосферы. Это означает, что во время распространения волны в области

прозрачности на некотором расстоянии от полоидальной поверхности неустойчивость сменяется затуханием. В итоге возникает стационарная картина: волновая энергия, полученная от частиц, в конечном итоге поглощается ионосферой.

В компрессионной области прозрачности, где  $\omega \approx \Omega_M \ll k_{\parallel} v_A$ , мнимые части уравнения (3.23) дают инкремент

$$\gamma_M = \omega_* \frac{\beta^2}{(1 + \beta)^2} \left[ \Gamma_M - \frac{1}{(k_{\parallel} R)^2} \frac{k_y^2}{k_{\perp}^2} \left( \frac{9}{2} \Gamma_M + 3 \Gamma_c R \right) \right], \quad (3.44)$$

где слагаемые  $\Gamma_{M,c}$  имеют вид

$$\Gamma_M = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{\tilde{\omega}_*}{\Omega_d} \right) \left( \frac{\omega}{\Omega_d} \right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{\omega}{\Omega_d}}, \quad (3.45)$$

$$\Gamma_c = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{\tilde{\omega}_*}{\Omega_d} \right) \left( \frac{\omega}{\Omega_d} \right)^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{\omega}{\Omega_d}} \left[ \left( \frac{B'}{B} + \frac{2}{R} \right) \lambda - \frac{2}{R} \right]. \quad (3.46)$$

Поскольку второй член в (3.44) намного меньше первого, критерий неустойчивости принимает вид  $\Gamma_M > 0$ , или

$$\tilde{\omega}_* < -\frac{\langle \Omega_d \rangle}{\beta}, \quad (3.47)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение согласно (3.45). Поскольку  $\langle \Omega_d \rangle > 0$ , этот критерий может быть удовлетворен если величина  $\tilde{\omega}_* = k_y T' / \omega_c$  отрицательна, что означает увеличение температуры с расстоянием:  $T' > 0$  (напомним, что  $k_y < 0$  — иначе дрейфовый резонанс волна-частица вообще невозможен). Большая величина  $\beta$  благоприятна для неустойчивости.

Принципиальное отличие дрейфово-компрессионных от альфвеновских волн заключается в том, что у первых из них зависимость инкремента от поперечного волнового вектора  $k_{\perp}$  выражена сравнительно слабо. Это видно из уравнения (3.44). Поскольку согласно уравнению (3.35) на протяжении области прозрачности величина  $k_{\perp}$  меняется от  $k_y$  до  $\infty$ , это означает, что инкремент практически не зависит от радиальной координаты. Поэтому стационарная картина невозможна: энергия, полученная волной от частиц, не может исчезнуть, и волна распространяется со все возрастающей амплитудой.

### 3.1.5 Итоги

Таким образом, в изотропной бесстолкновительной плазме имеются две моды, сцепленные между собой из-за кривизны силовых линий и неоднородности профиля давления: альфвеновская и дрейфово-компрессионная мода. В приближении  $(k_{\parallel}R)^{-2} \ll 1$  обе моды локализованы в двух областях прозрачности, достаточно изолированных друг от друга. В обеих областях мода имеет дисперсию поперек магнитных оболочек, т.е. частота волны  $\omega$  зависит от радиального волнового вектора  $k_{\perp}$ . Причиной дисперсии в конечном итоге является плазменное давление и кривизна силовых линий. Напомним, что в однородной плазме дисперсия появляется только при учете эффектов конечного ларморовского радиуса и скин-длины электронов. Обе области прозрачности ограничены резонансными поверхностями и поверхностями отсечки, где радиальная компонента волнового вектора обращается, соответственно, в бесконечность и нуль. В обеих областях магнитное поле волны имеет значительную компрессионную компоненту. Различие между альфвеновской и дрейфово-компрессионной модой заключается в том, что в первом случае местоположение зависит от параллельного волнового вектора и не зависит от азимутального, во втором случае — наоборот. Кроме того, вблизи поверхности альфвеновского резонанса обе компоненты поперечного магнитного поля волны обращаются в бесконечность, в то время как вблизи компрессионного резонанса — только азимутальная компонента.

Важно также отметить, что дрейфово-компрессионная мода существует только в том случае, если диамагнитная дрейфовая частота  $\omega_*$  имеет знак плюс. Поскольку она пропорциональна азимутальному волновому вектору, при каждом знаке градиента давления плазмы дрейфово-компрессионная область прозрачности существует только для одного из азимутальных направлений распространения волны.

### 3.2 Баллонная неустойчивость сцепленных альфвеновских и компрессионных мод

В предыдущем разделе мы рассмотрели сцепление альфвеновской и дрейфово-компрессионной мод в приближении  $(k_{\parallel} R)^{-2} \ll 1$ , когда эти две моды сцеплены между собой, но имеют существенно различные свойства. Сейчас мы рассмотрим случай, когда сцепление приводит к развитию неустойчивости космической плазмы, которую можно считать модификацией хорошо известной баллонной неустойчивости.

Баллонная неустойчивость представляет собой неустойчивость плазмы конечного давления, погруженной в криволинейное магнитное поле. Эта неустойчивость развивается в присутствии сильного западного кольцевого тока, что означает резкое уменьшение давления с расстоянием от Земли [Nameiri et al., 1991]. Баллонная неустойчивость предлагается на роль триггера суббурь [Liu et al., 2012; Rae and Watt, 2016; Nishimura et al., 2016] и источника некоторых УНЧ-волн типа Pc5 и Pi2 [Panov et al., 2012; Keiling, 2012; Golovchanskaya et al., 2015].

Во многих более ранних работах считалось, что баллонная неустойчивость развивается на альфвеновской ветви колебаний. Однако Мазур и др. [2012] показали, что, если рассматривать колебания в магнитной гидродинамике, в действительности она имеет место на медленной магнитозвуковой ветви. К такому же выводу позднее пришли также авторы работ [Kozlov et al., 2014; Черемных и др., 2014]. Таким образом, учет сцепления мод имеет принципиальное значение для изучения баллонной неустойчивости. Но поскольку космическая плазма бесстолкновительна, применимость МГД к ней вызывает сомнения. Однако в бесстолкновительной плазме имеется другая компрессионная ветвь колебаний — дрейфово-компрессионная мода, о которой шла речь выше. Таким образом, изучение баллонной неустойчивости сцепленных альфвеновской и дрейфово-компрессионной мод представляет значительный интерес.

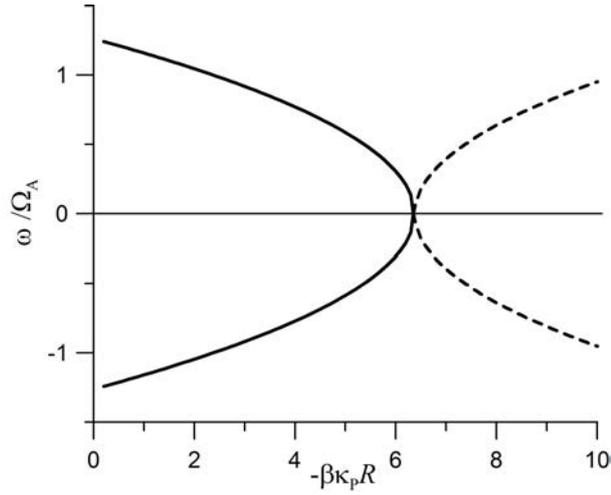


Рисунок 49. Действительная и мнимая часть частоты волны (сплошная и пунктирная линии, соответственно) в случае  $\omega_* \rightarrow 0$

Обычно баллонная неустойчивость рассматривается для азимутальных колебаний, для которых  $k_x = 0$ . Тогда уравнение (3.23) может быть записано в виде:

$$\frac{\omega^2}{v_A^2} R^2 + \frac{9}{4(1+\beta)} \frac{\omega}{\omega - \Omega_M} - \frac{5(1+\beta)}{4} \frac{\omega - \Omega_M}{\omega} = Z, \quad (3.48)$$

где введены следующие обозначения:  $Z = k_{\parallel}^2 R^2 + \beta \kappa_P R + 1$  и  $\Omega_M = \omega_* \beta / (1 + \beta)$ .

Величина  $\kappa_P$  связана с равновесным током как  $\kappa_P = jB/cP$ .

Сначала рассмотрим случай  $\omega_* \rightarrow 0$ , когда дрейфово-компрессионная мода отсутствует. Тогда уравнение (3.48) имеет решение  $\omega^2 = (k_{\parallel}^2 + H)v_A^2$  с баллонным членом

$$H = \frac{\beta}{R^2} \left[ \kappa_P R + \frac{1}{1+\beta} \left( \frac{7}{2} + \frac{5\beta}{4} \right) \right]. \quad (3.49)$$

Неустойчивость развивается если  $\omega^2 < 0$  (рис. 49). Порог неустойчивости задается соотношением

$$k_{\parallel}^2 R^2 + \beta \kappa_P R + \frac{\beta}{1+\beta} \left( \frac{7}{2} + \frac{5\beta}{4} \right) < 0. \quad (3.50)$$

Как видно, неустойчивость развивается при резком уменьшении давления с расстоянием:  $P' < 0$ . В соответствии с условием равновесия такая ситуация возможна при сильном западном токе. Неустойчивость имеет аperiодический характер  $\omega^2$ , т.е. неустойчивая мода имеет чисто мнимую частоту. Это — баллонная неустойчивость, известная из МГД. В частности, критерий неустойчивости (3.50) прак-

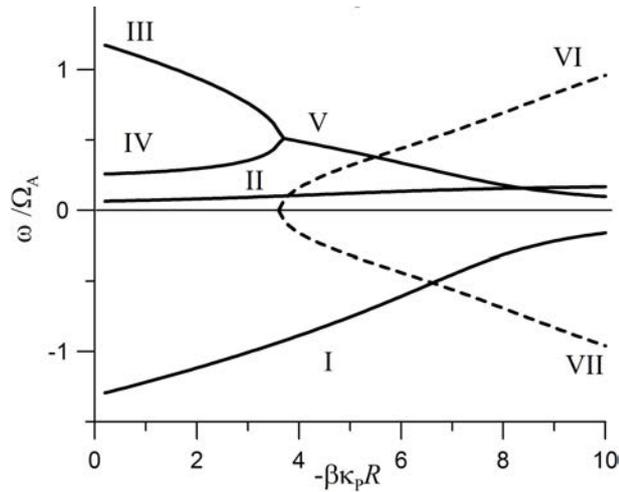


Рисунок 50. Действительная и мнимая часть частоты волны (сплошная и пунктирная линии, соответственно) в случае  $\Omega_M/\Omega_A = 0.2$ , где  $\Omega_A = k_{\parallel}v_A$  — альфвеновская частота

тически совпадает (за исключением третьего слагаемого, роль которого не очень велика) с полученным ранее в работах [Liu, 1997; Мазур и др., 2012].

Однако резкий градиент плазменного давления означает наличие эффектов диамагнитного дрейфа и появление дрейфово-компрессионной моды. Численное решение уравнения (3.48) при  $\omega_* \neq 0$  показано на рисунке 50.

В этом случае существует четыре ветви колебаний. Первая из них (I на рис. 50) всегда имеет реальную частоту. Она соответствует альфвеновской волне, распространяющейся в сторону, противоположную направлению диамагнитного дрейфа ионов. Мы не будем рассматривать ее в дальнейшем.

Частота второй моды (II на рис. 50) меняется от нуля при очень низком давлении почти до дрейфово-компрессионной частоты при большом западном токе, но всегда меньше  $\Omega_M$ . Эта мнимая мода, которая является артефактом приближения, рассматриваемого в данной работе ( $\omega \gg k_{\parallel}v_{\parallel}$ ). Мы также не будем рассматривать ее в дальнейшем.

Две наиболее интересные для нас моды отмечены на рисунке 50 цифрами III и IV. Первая из них соответствует альфвеновской моде, распространяющейся в сторону диамагнитного дрейфа ионов. При малом давлении ее частота близка

к  $\omega = +k_{\parallel}v_A$ , с увеличением западного тока она уменьшается. Частота моды IV, наоборот, растет от величины  $\Omega_M$ . Эта ветвь колебаний представляет собой дрейфово-компрессионную моду.

Если ток не очень велик, частота обеих этих мод имеет только реальную часть. Однако при некотором критическом значении тока  $j_c$  частоты мод III и IV сравниваются. На рис. 50 это соответствует тому, что линии III и IV сливаются и образуют две новые ветви колебаний с комплексно-сопряженными частотами. Они имеют одну и ту же реальную часть (обозначенную цифрой V) и взаимно противоположные мнимые части (VI и VII). Одна из них затухает со временем (ветвь VII), другая растет (ветвь VI). Эта растущая мода может быть названа дрейфово-баллонной модой. В отличие от баллонной неустойчивости в МГД, она не является апериодической; можно сказать, плазма колеблется с некоторой реальной частотой, но амплитуда этого колебания растет со временем.

Необходимо отметить, что эта мода отлична от дрейфово-баллонной моды, рассмотренной ранее в работах [Бойко и Черемных, 1988; Miura et al., 1989; Andrushchenko et al., 1990]. Дрейфовые эффекты в нашей работе и в этих работах входят различным образом. В работах [Бойко и Черемных, 1988; Miura et al., 1989; Andrushchenko et al., 1990] рассмотрено влияние сильных градиентов давления на дрейфово-альфвеновские волны, частота которых может быть получена из частоты альфвеновских волн с помощью подстановки  $\omega^2 \rightarrow \omega(\omega - \omega_*)$ . Такого рода модификация нами не рассматривалась, поскольку мы изначально предположили, что плотность (но не давление!) горячих частиц много меньше, чем холодных:  $n_h/n_c \ll 1$ . Именно такая ситуация характерна для магнитосферной плазмы. В этом случае диамагнитный член  $\omega_*$  в альфвеновском дисперсионном уравнении уменьшается в  $n_h/n_c$  раз [Pokhotelov et al., 1985] и им можно пренебречь. С другой стороны, нами учтено сцепление альфвеновской моды с дрейфово-компрессионной, полностью отсутствовавшей в [Бойко и Черемных, 1988; Miura et al., 1989; Andrushchenko et al., 1990].

Найдем порог найденной нами дрейфово-баллонной неустойчивости. Рассмотрим предел  $\Omega_M \ll \Omega_A$ . Тогда уравнение четвертого порядка (3.48) сводится к кубическому уравнению для переменной  $\chi = \omega/\Omega_A$ :

$$a_1\chi^3 + a_2\chi^2 + a_3\chi + a_4 = 0,$$

где коэффициенты  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -\Omega_M/\Omega_A$ ,  $a_3 = -Z_0/4$ ,  $a_4 = -b[Z_0 + \frac{9}{4}(1 + \beta) + \frac{5}{4}\frac{1}{1+\beta}]$ . Здесь обозначено  $Z_0 = Z + \frac{5}{4}(1 + \beta) - \frac{9}{4}\frac{1}{1+\beta}$ . Два из трех корней этого уравнения совпадают, если дискриминант равен нулю:

$$D = -4a_2^3a_4 + a_2^2a_3^2 - 4a_1a_3^3 + 18a_1a_2a_3a_4 - 18a_1^2a_4^2 = 0$$

(это соответствует случаю, когда ветви III и IV на рисунке 50 сливаются). При  $D < 0$  два из трех корней являются комплексно-сопряженными величинами, и один из них должен соответствовать неустойчивой моде. Предполагая далее, что  $a_2 \ll 1$ , мы находим порог неустойчивости:

$$Z_0 = 3 \left[ \frac{9}{4}(1 + \beta) + \frac{5}{4}\frac{1}{1 + \beta} \right]^{2/3} \left( \frac{\Omega_M}{\Omega_A} \right)^{2/3}. \quad (3.51)$$

Следовательно, при учете дрейфовых эффектов критический ток выражается в виде

$$j_c = \frac{P}{cB} \frac{Z_0 - 1 - k_{\parallel}^2 R^2}{\beta R}.$$

Отметим, что критический ток, необходимый для баллонной неустойчивости, снижается с ростом диамагнитной частоты  $\omega_*$ .

### 3.3 Альфвеновская и зеркальная моды

Зеркальная мода может существовать в плазме конечного давления при существенной анизотропии: средние скорости движения частиц поперек силовых линий должны превышать продольные скорости в соответствии с соотношением (9) из Введения. Неоднократно высказывалось предположение, что с зеркально-дрейфовой модой следует отождествлять компрессионные волны типа Pc5 [Rae et al., 2007; Soto-Chavez et al., 2019; Cooper et al., 2021]. С этой модой отождеств-

лялись также некоторые колебания в переходном слое [Denton, 2000; Шевырев, 2005] и солнечном ветре [Hellinger et al., 2017].

В работе [Lin and Parks, 1978] было впервые отмечено, что эта мода сцеплена с альфвеновской за счет неоднородности плазмы. Различные аспекты этого сцепления рассматривались в ряде публикаций [Migliuolo, 1983; Pokhotelov et al., 1985; Woch et al., 1988], однако полная картина влияния сцепления на характер дисперсии и условия неустойчивости альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод до сих пор не ясна. В данной работе сделан шаг в этом направлении.

### 3.3.1 Основные уравнения

Здесь мы по прежнему будем рассматривать одномерно-неоднородную цилиндрическую модель магнитосферы: магнитные силовые линии имеют постоянный радиус кривизны  $R$  (играющий роль радиальной координаты  $x$ ), все равновесные параметры (концентрация  $n$ , температура  $T$ , равновесное магнитное поле  $B$ ) меняются только поперек магнитных оболочек. Имеющаяся в плазме популяция холодных электронов обеспечивает равенство нулю продольной компоненты электрического поля волны ( $E_{\parallel} = 0$ ). Отношение плазменного давления к магнитному  $\beta \sim 1$ . Однако в данном разделе будет учитываться неравенство скоростей частиц в продольном и поперечном направлениях,  $V_{\parallel}$  и  $V_{\perp}$ , соответственно. Равновесная функция распределения  $F$  будет приниматься бимаксвелловской:

$$F = \frac{n}{(2\pi)^{3/2} V_{\perp}^2 V_{\parallel}} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2}{2V_{\parallel}^2} - \frac{v_{\perp}^2}{2V_{\perp}^2}\right), \quad (3.52)$$

или

$$F = \frac{n}{(2\pi)^{3/2} V_{\perp}^2 V_{\parallel}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{V_{\parallel}^2} + \frac{\mu B \alpha}{V_{\perp}^2}\right). \quad (3.53)$$

Здесь  $\varepsilon = v^2/2$  энергия частицы в расчете на единицу массы,  $\mu = v_{\perp}^2/2B$  магнитный момент частицы,  $\alpha = \frac{V_{\perp}^2}{V_{\parallel}^2} - 1$  индекс анизотропии.

Обозначим продольную и поперечную компоненты тензора давления плазмы  $P_{\parallel}$  and  $P_{\perp}$ . Тогда условие равновесия запишется в виде

$$\frac{4\pi P'_{\perp}}{B^2} = -\frac{B'}{B} - \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2}\right). \quad (3.54)$$

Штрих означает дифференцирование по радиальной координате  $x$ .

Система уравнений гирокинетики по прежнему записывается в виде (3.5, 3.6), и общее дисперсионное уравнение — в виде (3.23). Компрессионный оператор и оператор сцепления по прежнему выражаются в виде (3.7, 3.12), но альфвеновский оператор несколько меняет вид. Вместо (3.10) он записывается в виде

$$L_A = \left( \frac{\omega^2}{v_A^2} - \sigma k_{\parallel}^2 \right) + k_y^2 \frac{4\pi P'}{B^2} \left( \frac{B'}{B} - \frac{1}{R} \right) + a_A, \quad (3.55)$$

где  $\sigma = 1 - (1/2)(\beta_{\parallel} - \beta_{\perp})$  (коэффициент  $a_A$  по прежнему задается формулой (3.11)).

Зеркальная мода соответствует пределу

$$\omega, \omega_d \ll k_{\parallel} v_{\parallel}. \quad (3.56)$$

В этом случае резонансный знаменатель в формуле (3.9) сводится к виду

$$\frac{1}{\omega - \omega_d - k_{\parallel} v_{\parallel}} \approx -\frac{i\pi}{k_{\parallel}} \delta(v_{\parallel}).$$

Ларморовский радиус будем считать малой величиной ( $\xi \ll 1$ ), давление создается только ионной компонентой плазмы. Тогда компрессионный, альфвеновский оператор и оператор сцепления переписутся в виде

$$L_M = \tau - i \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma}, \quad (3.57)$$

$$L_A = k_{\perp}^2 \left( \sigma k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2} \right) - k_y^2 \frac{4\pi}{B^2} \left( P'_{\perp} \frac{B'}{B} - \frac{P'_{\parallel}}{r} \right) + i k_y^2 \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma} \left( \frac{B'}{B} \right)^2, \quad (3.58)$$

$$L_c = \frac{4\pi P'_{\perp}}{B^2} + i \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma} \frac{B'}{B}. \quad (3.59)$$

Здесь обозначено:

$$\tau = 1 + \beta_{\perp} \left( 1 - \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} \right), \quad (3.60)$$

$$\omega_* = \frac{k_y V_{\parallel}^2}{\omega_c} \left[ \frac{n'}{n} + 3 \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} \frac{B'}{B} \right], \quad (3.61)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \frac{k_{\parallel} V_{\parallel}}{\beta_{\perp}}. \quad (3.62)$$

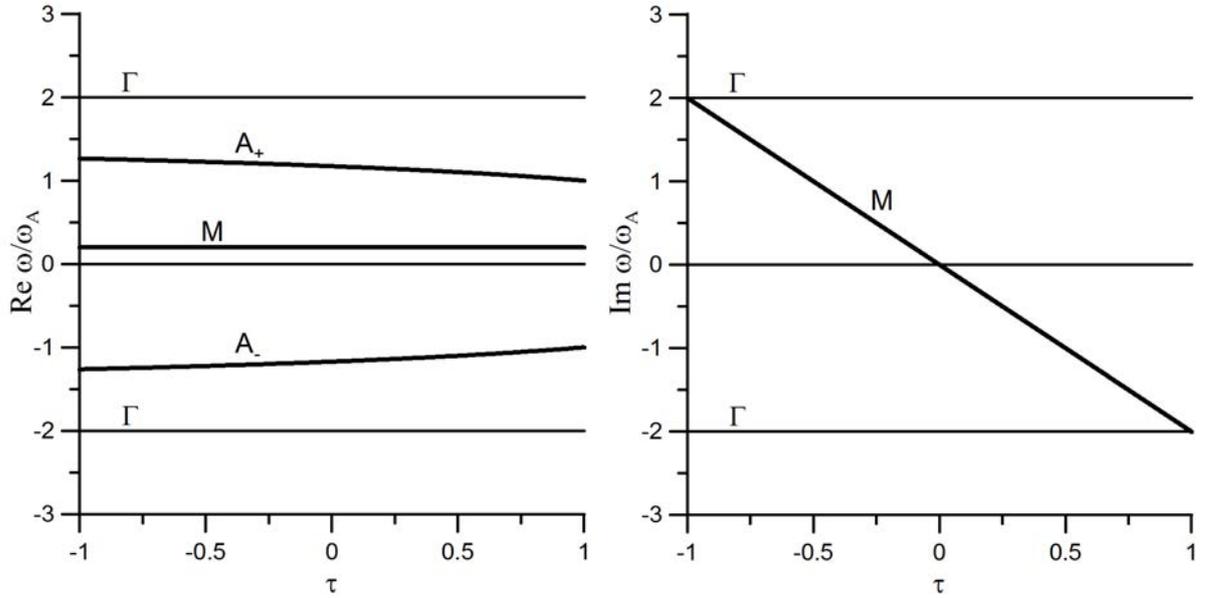


Рисунок 51. Численное решение уравнения (3.63) для расцепленного случая  $\Lambda = 0$ : реальная (слева) и мнимая (справа) части частоты  $\omega$  как функция параметра  $\tau$ . Вычисления произведены для параметров  $\omega_*/\omega_A = 0.2$ ,  $\Gamma/\omega_A = 2$ ,  $\beta_\perp = 3$ ,  $k_\perp/k_y = 1$ . Буквы  $A_+$  и  $A_-$  обозначают положительные и отрицательные альфвеновские моды, буква  $M$  — зеркально-дрейфовую моду

В областях плазмы с высоким давлением членом с кривизной в условии равновесия (3.54) можно пренебречь [Pokhotelov et al., 1985]. Предполагая, что  $(\omega - \omega_*)/\Gamma \ll 1$  и  $\omega_A = k_\parallel v_A$ , уравнение (3.23) можно переписать в виде

$$\frac{k_\perp^2}{k_y^2} \left( \sigma - \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \right) + \Lambda + i\Lambda \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma} - \Lambda \frac{1 - 2i \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma}}{\tau - i \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma}} = 0, \quad (3.63)$$

где величина

$$\Lambda = \frac{\beta_\perp^2}{4} \frac{1}{k_\parallel^2} \left( \frac{P'_\perp}{P_\perp} \right)^2 = \frac{1}{k_\parallel^2} \left( \frac{B'}{B} \right)^2. \quad (3.64)$$

играет роль параметра сцепления мод.

Уравнение (3.63) играет роль дисперсионного уравнения сцепленных альфвеновской и зеркально-дрейфовой моды.

### 3.3.2 Сцепление альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод пренебрежимо мало

В приближениях  $\Lambda = 0$  или  $k_y/k_\perp = 0$  альфвеновская и зеркально-дрейфовая моды расцеплены (однако мы предпочитаем считать отношение  $k_y/k_\perp$  фиксированным, поскольку ниже мы собираемся рассмотреть, к чему приводит его вариация).

Если  $\Lambda = 0$ , то система (3.5,3.6) сводится к двум независимым уравнениям:

$$\omega^2 - \sigma k_\parallel^2 v_A^2 = 0, \quad (3.65)$$

$$\tau - i \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma} = 0. \quad (3.66)$$

Первое из них описывает альфвеновскую моду. Обозначим решение (3.65)  $\Omega_A$ . Поскольку это уравнение квадратное, оно имеет два решения, с положительной и отрицательной частотами:  $\Omega_A = \pm \sqrt{\sigma} k_\parallel v_A$  (ниже мы будем называть их положительными и отрицательными альфвеновскими модами). Когда  $\tau$  возрастает, величина  $\sigma$  уменьшается, и абсолютная величина частоты также уменьшается (рис. 51). Когда  $\sigma < 0$ , развивается хорошо известная шланговая неустойчивость.

В случае  $\Lambda = 0$  поперечная дисперсия альфвеновской волны отсутствует: частота  $\Omega_A$  не зависит от поперечного волнового вектора  $k_\perp$ . Это означает отсутствие передачи энергии альфвеновской волны поперек магнитных оболочек.

Второе уравнение, (3.66), описывает зеркально-дрейфовую моду с частотой  $\Omega_M$ . Ее реальная и мнимая части есть

$$\text{Re } \Omega_M = \omega_*, \quad (3.67)$$

$$\text{Im } \Omega_M = -\tau \Gamma \quad (3.68)$$

(см. рис. 51). Зеркально-дрейфовая неустойчивость развивается при условии  $\tau < 0$ , когда поперечное давление существенно больше продольного.

Хотя реальная часть частоты зеркально-дрейфовой моды пропорциональна азимутальной компоненте волнового вектора  $k_y$ , зависимость от радиальной компоненты  $k_x$  отсутствует. Следовательно, передачи энергии зеркально-дрейфовой моды поперек магнитных оболочек невозможна.

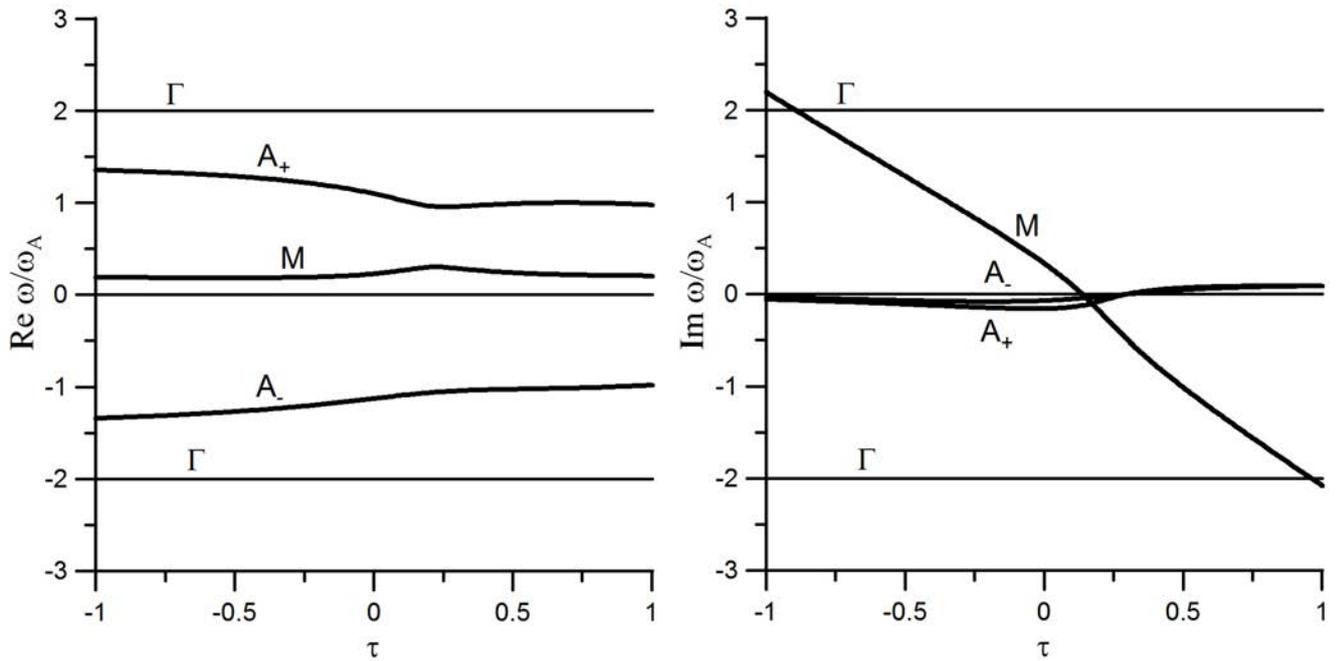


Рисунок 52. То же самое, что на рис. 51, но для случая слабого сцепления ( $\Lambda = 0.2$ ). Обозначения те же, что на рис. 51

### 3.3.3 Слабое, но ненулевое сцепление альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод

По мере того как сцепление (т.е. параметр  $\Lambda$ ) растет, альфвеновская и зеркально-дрейфовая ветви модифицируются: положительная альфвеновская и зеркально-дрейфовая моды сближаются. Как видно из рис. 52, при некотором значении,  $\tau_c$  показателя анизотропии между этими ветвями формируется некий перешеек (на рис. 52  $\tau_c \approx 0.3$ ). С ростом величины  $\Lambda$  этот перешеек становится все более узким.

Другой интересной особенностью этого случая является появление мнимой добавки к частоте альфвеновской волны. Когда  $\tau$  меньше некоторого критического значения (близкого к  $\tau_c$ ), эта мнимая добавка отрицательна и альфвеновская волна затухает, но затухание сменяется неустойчивостью при  $\tau > \tau_c$ . Эта неустойчивость имеет место при любом направлении распространения альфвеновской волны.

Случай  $\Lambda \ll 1$  может быть изучен аналитически. Сначала рассмотрим зеркально-дрейфовую моду. В первом приближении сцепление отсутствует и частота задается уравнением (3.66) с решением  $\Omega_M$ :  $\tau - i(\Omega_M - \omega_*)/\Gamma = 0$ . Сделаем

естественное предположение, что  $\omega_* \ll \omega_A$ ; однако нет никакой причины предполагать, что величина  $\tau\Gamma$  очень мала по сравнению с  $\omega_A$ . Тогда из уравнения (3.63) получаем реальную и мнимую части частоты волны:

$$\operatorname{Re} \omega = \omega_* \left[ 1 + \Lambda \Gamma \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \frac{2\Gamma\tau}{\omega_A^2} \left( \sigma + \frac{\Gamma^2\tau^2}{\omega_A^2} \right)^{-2} \right], \quad (3.69)$$

$$\operatorname{Im} \omega = -\Gamma\tau + \Lambda \Gamma \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \left( \sigma + \frac{\Gamma^2\tau^2}{\omega_A^2} \right)^{-1} \quad (3.70)$$

(заметим, что по предположению  $\Lambda \ll 1$ ; кроме того, о зеркально-дрейфовых модах имеет смысл говорить только при  $|\tau| \ll 1$ ).

Из этих уравнений следует три важных вывода. Во-первых, сцепление оказывает заметное влияние и на реальную, и на мнимую части частоты волны. Действительно, хотя  $\Lambda \ll 1$ , но  $\Gamma/\omega_A \gg 1$ , и вторые слагаемые в правых частях уравнений (3.69, 3.70) имеют тот же порядок, что и первые слагаемые. Во-вторых, сцепление сдвигает порог неустойчивости (как видно также из рис. 52): в космической плазме всегда  $\sigma > 0$ , поэтому второй член в уравнении (3.70) всегда положителен; следовательно условие  $\tau < 0$  уже не обязательно для зеркальной неустойчивости, оно заменяется другим условием:

$$\tau < \Lambda \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \left( \sigma + \frac{\Gamma^2\tau^2}{\omega_A^2} \right)^{-1}. \quad (3.71)$$

Это обстоятельство особенно важно для физики магнитосферы, поскольку в космической плазме анизотропия обычно недостаточно велика для выполнения условия  $\tau < 0$ . В третьих, инкремент неустойчивости пропорционален продольной компоненте волнового вектора  $k_\parallel$  и достигает максимального значения для мод с азимутальным распространением ( $k_x = 0$ ), когда он становится независимым от поперечного волнового вектора  $k_\perp$ .

### 3.3.4 Сильное сцепление альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод

При некотором критическом значении параметра сцепления,  $\Lambda_0$ , положительная альфвеновская и зеркально-дрейфовая ветви сливаются: их реальная и мнимая части становятся равными в некоторой точке  $\tau_0$ . Если сцепление еще сильнее,

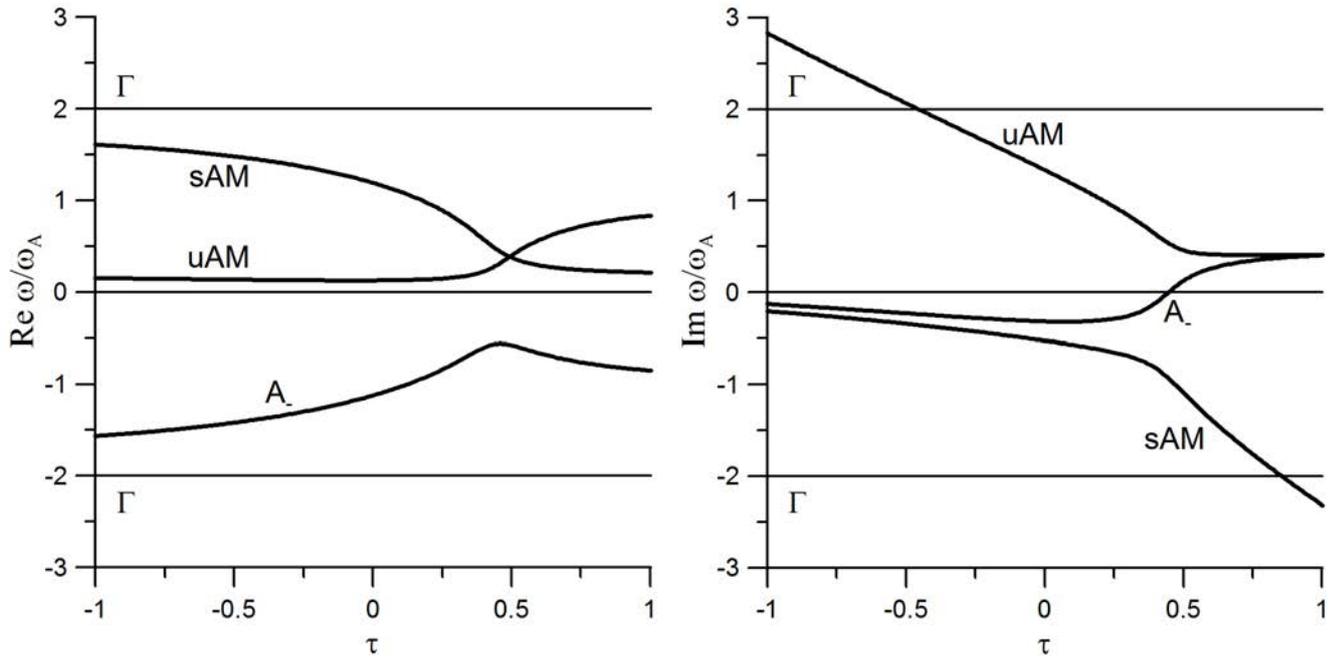


Рисунок 53. То же самое, что на рис. 51, но для  $\Lambda = 1.0$ : альфвеновская и зеркально-дрейфовая ветви пересекаются. Буквы  $uAM$  и  $sAM$  обозначают неустойчивую и устойчивую альфвено-зеркальные моды, соответственно

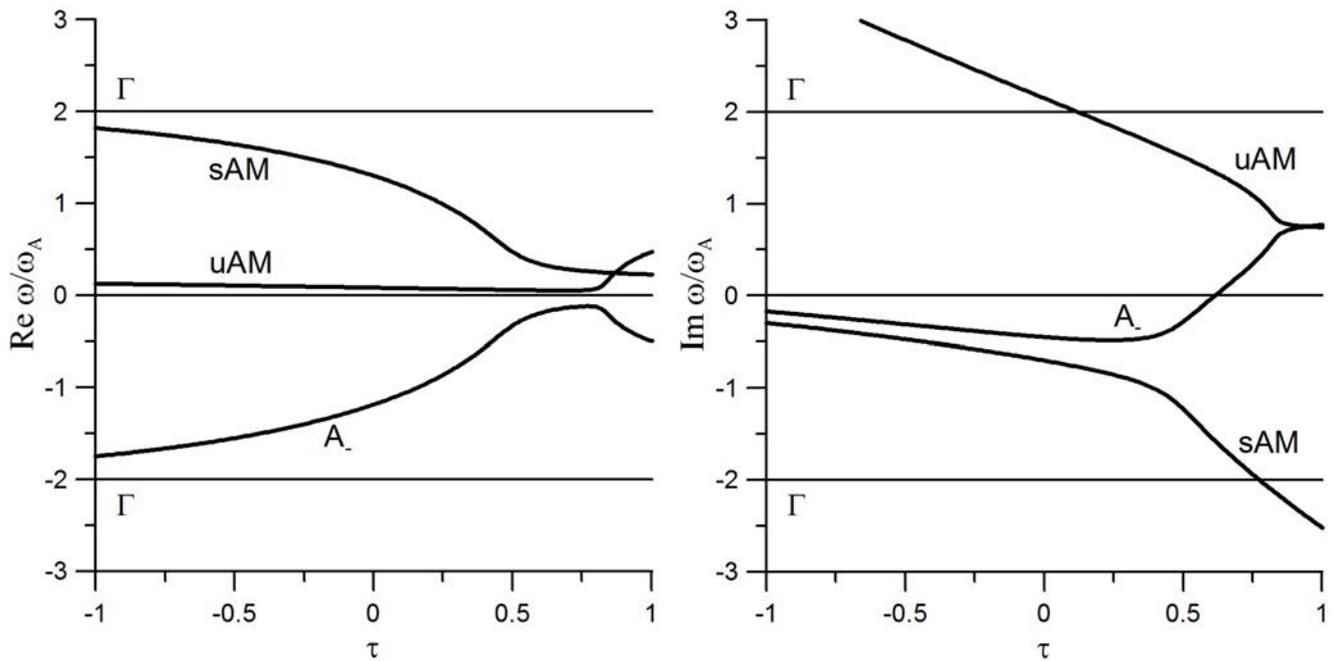


Рисунок 54. То же самое, что на рис. 51, но для  $\Lambda = 2.0$ . Обозначения те же, что на рис. 53

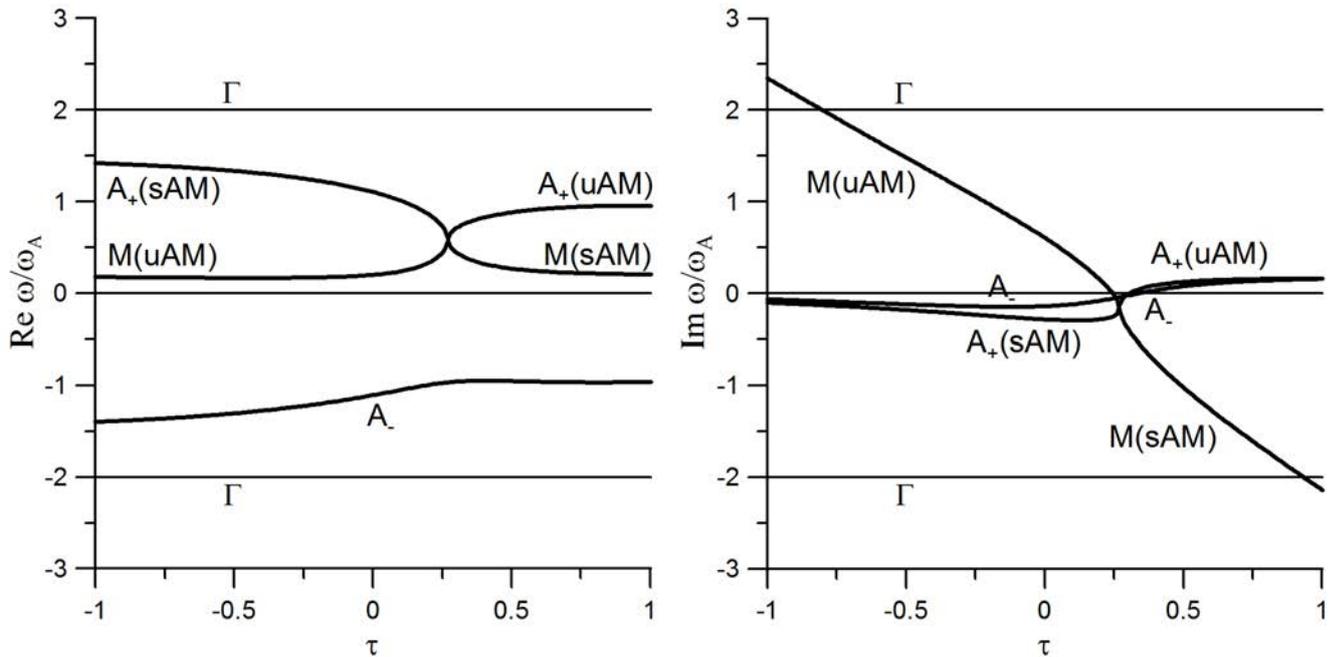


Рисунок 55. Тоже самое, что на рис. 51, но для критического сцепления ( $\Lambda_c = 0.37$ ): альфвеновская и зеркально-дрейфовая ветви сливаются

происходит качественная реорганизация ветвей колебаний: при продолжении из области  $\tau > \tau_0$  в область  $\tau < \tau_0$  положительная альфвеновская ветвь переходит в зеркально-дрейфовую, а зеркально-дрейфовая — в альфвеновскую (рис. 53). Таким образом, сами термины «альфвеновская мода» и «зеркально-дрейфовая мода» становятся неприменимыми. Для их замены мы предлагаем новые термины: «неустойчивая альфвено-зеркальная мода» и «устойчивая альфвено-зеркальная мода». Первая из них имеет свойства альфвеновской моды при  $\tau > \tau_0$  и свойства зеркальной моды при  $\tau < \tau_0$ ; при любом значении  $\tau$  эта волна растет. Вторая из них, наоборот, имеет свойства зеркальной моды при  $\tau > \tau_0$  и альфвеновской моды при  $\tau < \tau_0$ ; мнимая часть ее частоты всегда соответствует затуханию. По мере роста сцепления модуль мнимой части обеих альфвено-зеркальных мод в конечном итоге становится больше, чем реальная часть частоты (рис. 54).

Случай критического сцепления заслуживает более детального рассмотрения (рис. 55). Поскольку графики реальной и мнимой частей частоты сливаются, но остаются непрерывными, имеет место некоторая неопределенность в определении

того, где какая ветвь. Например, неясно, то ли более высокочастотная ветвь с положительной частотой слева от точки слияния переходит в более высокочастотную ветвь справа от точки слияния, то ли наоборот. Эта неопределенность показана на рис. 55 посредством двойного обозначения. Таким образом, более высокочастотная ветвь с положительной частотой слева от точки слияния может быть названа и положительной альфвеновской модой, и устойчивой альфвено-зеркальной модой.

Необходимо иметь в виду, что решения с  $\text{Im } \omega \geq \Gamma$  не имеют смысла поскольку они нарушают условие (3.56). Для  $|\tau| \sim 1$  только альфвеновское решение имеет смысл.

### 3.3.5 Поперечная дисперсия сцепленных альфвеновских и зеркально-дрейфовых мод

Как мы говорили выше, при отсутствии сцепления обе ветви, альфвеновская и зеркально-дрейфовая, не имеют поперечной дисперсии: их частота  $\omega$  не зависит от радиальной компоненты волнового вектора  $k_x$  (а у альфвеновской — и от азимутальной компоненты  $k_y$ ). Однако поперечная дисперсия возникает при учете сцепления.

Например, как видно из уравнения (3.69), в случае слабого сцепления радиальная и групповая компоненты групповой скорости зеркально-дрейфовой моды становятся равными

$$v_x = \frac{\partial}{\partial k_x} \text{Re } \omega = -\omega_* \Lambda \Gamma \frac{2k_x k_y^2}{k_\perp^4} \frac{2\Gamma\tau}{\omega_A^2} \left( \sigma + \frac{\Gamma^2 \tau^2}{\omega_A^2} \right)^{-2}, \quad (3.72)$$

$$v_y = \frac{\partial}{\partial k_y} \text{Re } \omega = \frac{\text{Re } \omega}{k_y} + \omega_* \Lambda \Gamma \frac{2k_x^2 k_y}{k_\perp^4} \frac{2\Gamma\tau}{\omega_A^2} \left( \sigma + \frac{\Gamma^2 \tau^2}{\omega_A^2} \right)^{-2} \quad (3.73)$$

Как следует из уравнения (3.77), у альфвеновской волны поперечные компоненты групповой скорости равны

$$v_x = -\Lambda \Gamma \frac{2k_x k_y^2}{k_\perp^4} \frac{\omega_A}{2\sqrt{\sigma}} \left[ \Gamma - \frac{\tau\Gamma}{\tau^2 \Gamma^2 + \sigma \omega_A^2} \right], \quad (3.74)$$

$$v_y = \Lambda \Gamma \frac{2k_y k_x^2}{k_\perp^4} \frac{\omega_A^2}{2\Gamma^2} \left[ 1 - \frac{\Gamma^2(1-2\tau)}{\tau^2 \Gamma^2 + \sigma \omega_A^2} \right] \quad (3.75)$$

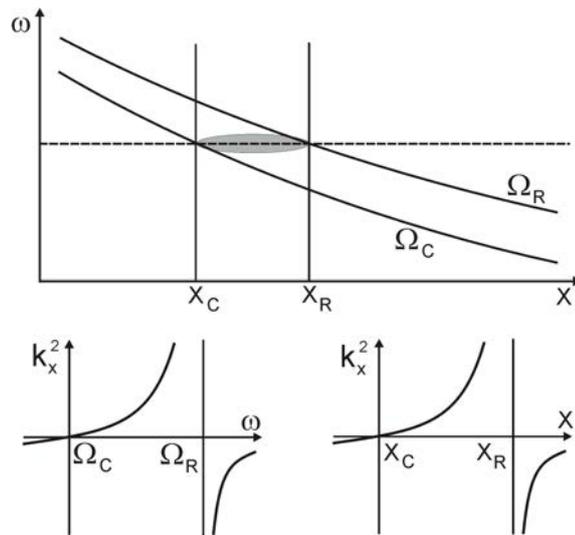


Рисунок 56. Сверху: пример поведения резонансных поверхностей и поверхностей отсечки. Область прозрачности обозначена серым овалом. Снизу: функции  $k_x^2(x)$  при заданном  $\omega$  и  $k_x^2(\omega)$  при заданном  $x$

У обеих мод обе компоненты групповой скорости исчезают при  $k_x = 0$  и  $k_x \rightarrow \infty$  (в случае зеркально-дрейфовой моды  $v_y$  исчезает в системе отсчета, движущейся в азимутальном направлении со скоростью  $\text{Re } \omega / k_y$ ).

Волна может распространяться только в области, где квадрат радиальной компоненты волнового вектора положителен:  $k_x^2 > 0$  (область прозрачности). Как обычно, введем понятия резонансных частот  $\Omega_R$  и частот отсечки, где первая соответствует случаю  $k_x \rightarrow \infty$ , вторая — случаю  $k_x = 0$ . Обе эти частоты являются функциями радиальной координаты (рис. 56). Уравнение  $k_x(\omega, x) = 0$  при фиксированном  $\omega$  имеет решение  $x_C$ , которое может быть найдено графически как точка пересечения функции  $\Omega_C(x)$  с горизонтальной линией, соответствующей частоте  $\omega$  (см. рис. 56). Магнитная поверхность  $x_C$  будет называться поверхностью отсечки. В случае альфвеновской волны ее обычно называют полоидальной поверхностью. Аналогично, введем понятие резонансной поверхности с радиальной координатой  $x_R$  как решение уравнения  $k_x(\omega, x) = \infty$  при фиксированном  $\omega$ . В случае альфвеновской волны ее обычно называют тороидальной поверхностью. Область прозрачности каждой моды располагается между поверхностями отсечки и резонанса.

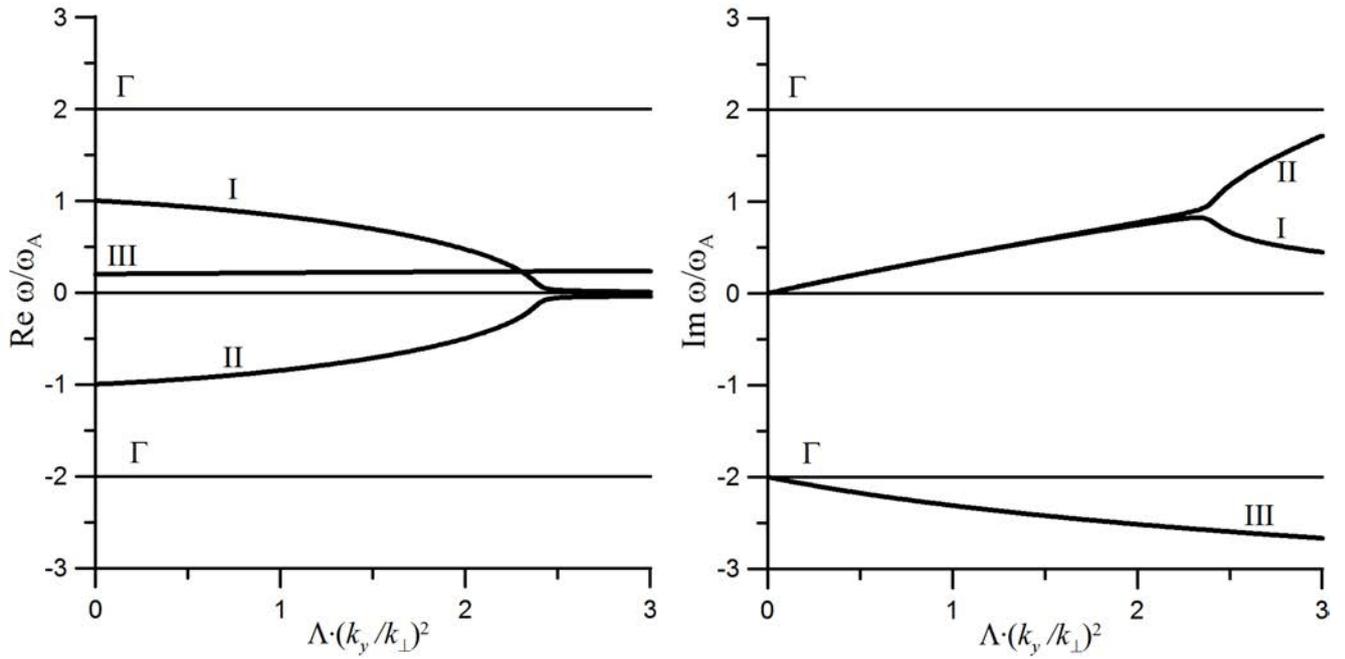


Рисунок 57. Реальная (слева) и мнимая (справа) части частоты  $\omega$  как функция параметра сцепления  $\Lambda$  и отношения  $k_y/k_\perp$  при  $\tau = 1.0$  (изотропный случай). Линии I и II представляют реальную часть частоты альфвеновских мод, линия III — реальную часть частоты зеркально-дрейфовой моды

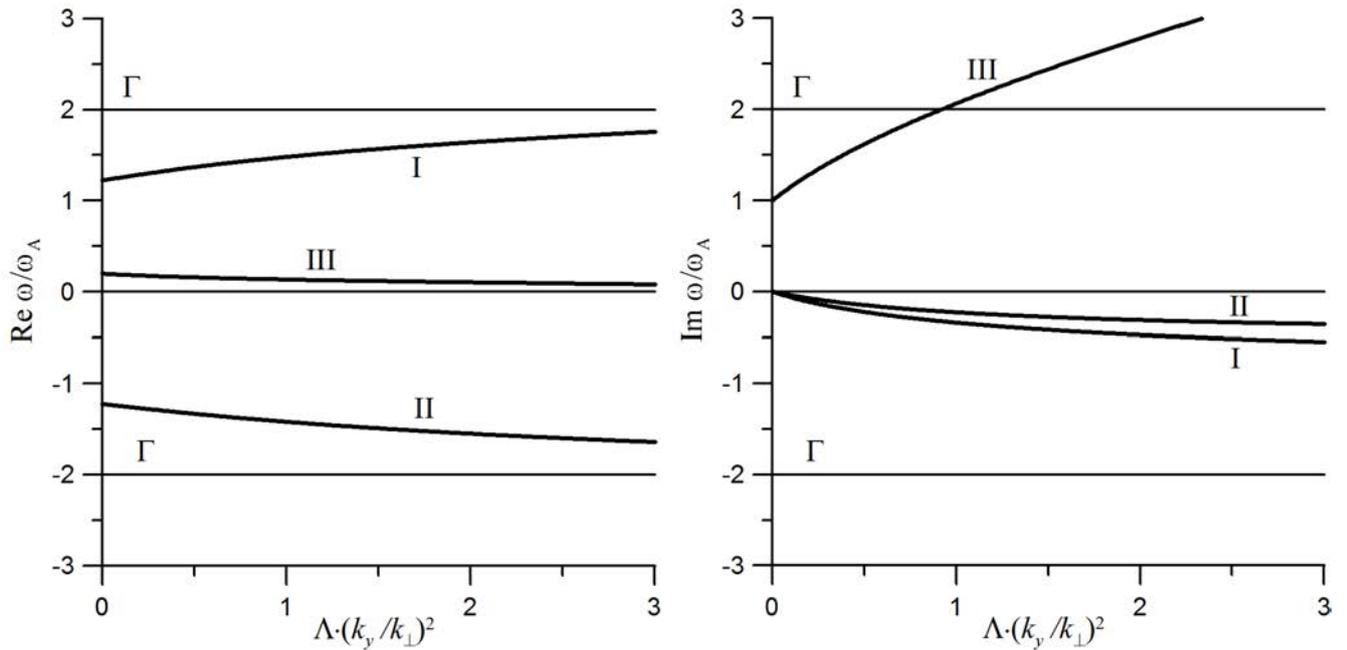


Рисунок 58. То же самое, что на рис. 57, но для случая  $\tau = -0.5$

Применим этот подход к альфвеновской волне. Зависимость  $\omega(x, k_x)$  для трех различных величин  $\tau$  показана на рисунках 57 и 58. Линии I и II соответствуют положительным и отрицательным альфвеновским волнам. Величина  $\Lambda \cdot (k_y/k_\perp)^2 = 0$  соответствует случаю резонанса (поскольку  $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$ ). Резонансная частота есть  $\Omega_R = \sqrt{\sigma} k_\parallel v_A$ . С приближением к поверхности отсечки величина  $\Lambda \cdot (k_y/k_\perp)^2$  растет. В случае  $\tau = 1.0$  частота отсечки больше частоты резонанса (рис. 57), в случае  $\tau = -0.5$  — наоборот, меньше (рис. 58).

Уравнение (3.77) или (3.79) может быть записано в виде

$$k_x^2 = k_y^2 \frac{\Omega_C^2(x) - \omega^2}{\omega^2 - \Omega_R^2(x)} \quad (3.76)$$

(мнимые части пренебрежены). В окрестностях резонансных поверхностей и поверхностей отсечки функции  $\Omega_R^2(x)$  и  $\Omega_C^2(x)$  могут быть записаны в виде  $\Omega_{R,C}(x) \approx (x - x_{R,C})\Omega'_{R,C}$ . Соответственно, радиальный компонент волнового вектора ведет себя как  $k_x^2 \propto (x_R - x)^{-1}$  вблизи резонансной поверхности или  $k_x^2 \propto (x - x_C)$  вблизи отсечки.

Как следует из (3.74, 3.75), компоненты поперечной групповой скорости ведут себя как  $v_x \propto (x - x_C)^{1/2}$ ,  $v_y \propto (x - x_C)$  вблизи поверхности отсечки и  $v_x \propto (x - x_C)^{3/2}$ ,  $v_y \propto (x - x_C)$  вблизи резонансной поверхности. Направление распространения в области прозрачности определяется поглощением энергии в районе резонансной точки. В результате, энергия волны распространяется от поверхности отсечки  $x_C$  до резонансной поверхности  $x_R$  [Leonovich and Mazur, 1993]. Поскольку  $v_x \gg v_y$  вблизи поверхности отсечки, волновой пакет распространяется под прямым углом к поверхности отсечки. Хотя при  $x \rightarrow x_C$  радиальная групповая скорость обращается в нуль, время прохождения пакета вблизи этой поверхности конечно, поскольку интеграл  $\int dx/v_x$  сходится в этой области. Вблизи резонансной поверхности  $v_x \ll v_y$ , поэтому пакет входит в эту поверхность по касательной. В этой области интеграл  $\int dx/v_x$  расходится, поэтому время движения вблизи этой поверхности бесконечно.

Слияние альфвеновской ветви с зеркально-дрейфовой вносит изменения в эту картину. Как видно из рис. 59, в случае критического значения  $\tau$  альфвеновская

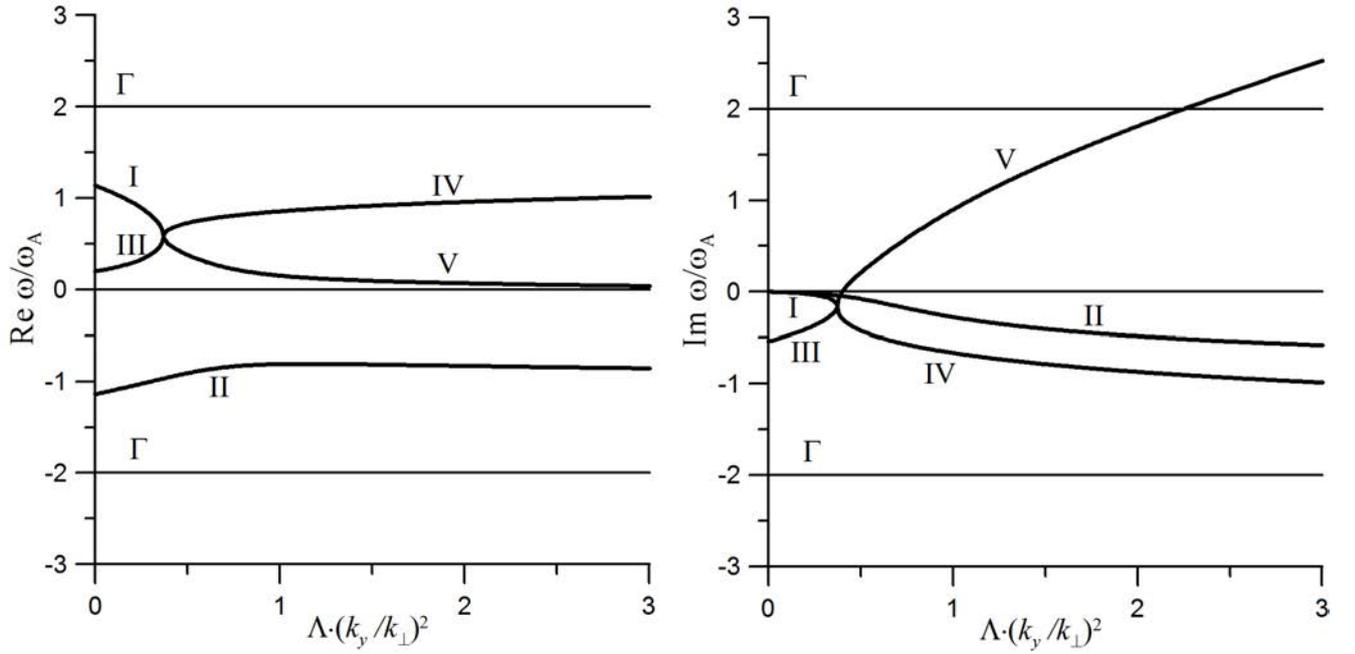


Рисунок 59. То же самое, что на рис. 57, но для случая  $\tau = 0.27$  (критическое сцепление)

мода (кривая I) сливается при некотором значении  $k_y/k_\perp$  с зеркально-дрейфовой модой (кривая III) с образованием двух новых ветвей, IV and V. Пока не совсем ясно, как трактовать пространственную структуру волны в этом случае.

**Неустойчивость сцепленных альфвеновских и зеркально-дрейфовых мод.** В разделе 3.3 было получено дисперсионное уравнение сцепленных альфвеновских и зеркально-дрейфовых мод (3.63), содержащее мнимую часть  $\Gamma$  (3.62). Рассмотрим неустойчивость альфвеновской волны, вызванную наличием этой добавки.

Сначала рассмотрим случай малого, но конечного сцепления:  $\Lambda \ll 1$ . Здесь параметр сцепления  $\Lambda$  дается формулой (3.64).

В первом приближении, когда  $\Lambda = 0$ , дисперсионное уравнение имеет решение  $\Omega_A = \pm\sqrt{\sigma}k_\parallel v_A$ . Во втором приближении частота только слабо отличается от  $\Omega_A$ , и квадрат частоты можно представить в виде  $\omega^2 = \Omega_A^2 + 2\Omega_A(\omega - \Omega_A)$ , где второе слагаемое много меньше первого. Тогда мы получаем из уравнения (3.63):

$$\text{Re } \omega = \sqrt{\sigma}\omega_A + \Lambda\Gamma \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \frac{\omega_A}{2\sqrt{\sigma}} \left[ \Gamma - \frac{\tau\Gamma}{\tau^2\Gamma^2 + \sigma\omega_A^2} \right], \quad (3.77)$$

$$\text{Im } \omega = \Lambda \Gamma \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \frac{\omega_A^2}{2\Gamma^2} \left[ 1 - \frac{\Gamma^2(1-2\tau)}{\tau^2\Gamma^2 + \sigma\omega_A^2} \right]. \quad (3.78)$$

Мы видим, что сцепление оказывает значительное влияние и на реальную, и на мнимую части частоты волны. Знак правой части уравнения (3.78) меняется. В частности, при  $\tau \approx \sqrt{2} - 1$  имеет место неустойчивость, в хорошем согласии с результатами численных расчетов, представленных на рис. 52. Эта неустойчивость вызывается исключительно сцеплением мод. Как и в случае зеркально-дрейфовой моды, инкремент пропорционален продольной компоненте волнового вектора  $k_\parallel$  и достигает максимального значения для мод с азимутальным распространением ( $k_x = 0$ ), когда он становится независимым от поперечного волнового вектора  $k_\perp$ . В противоположном случае, когда  $k_x \rightarrow \infty$ , инкремент стремится к нулю.

Если сцепление альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод является сильным ( $\Lambda \sim 1$ ), то также можно получить аналитические выражения для инкремента альфвеновской неустойчивости. Пусть  $|\tau| \sim 1$ . Тогда второй член в знаменателе дисперсионного уравнения (3.63) намного меньше первого члена, и это уравнение приобретает вид

$$\frac{k_\perp^2}{k_y^2} \left( \sigma - \frac{\omega^2}{\omega_A^2} \right) - \Lambda \frac{1-\tau}{\tau} + i\Lambda \frac{\omega - \omega_*}{\Gamma} \left( 1 - \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau} \right) = 0. \quad (3.79)$$

Если реальная часть частоты намного превышает мнимую, реальная часть частоты равна

$$\omega^2 = \omega_A^2 \left( \sigma - \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \Lambda \frac{1-\tau}{\tau} \right). \quad (3.80)$$

Отметим, что при условии

$$\sigma < \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \Lambda \frac{1-\tau}{\tau} \quad (3.81)$$

квадрат частоты отрицателен. Условие (3.81) заменяет условие шланговой неустойчивости в однородной плазме, которое имело вид  $\sigma < 0$ . В дальнейшем мы будем полагать что условие (3.81) не выполняется. Тогда мнимая часть (3.79) дает инкремент неустойчивости:

$$\text{Im } \omega = \Lambda \frac{k_y^2}{k_\perp^2} \frac{\omega_A^2}{2\Gamma} \frac{\omega - \omega_*}{\omega} \left( 1 - \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau} \right). \quad (3.82)$$

Критерий неустойчивости не сильно отличается от случая слабого сцепления (3.78). Заметим, что уравнения (3.80,3.82) неприменимы при  $|\tau| \ll 1$ , но они работают при любом значении  $\Lambda$ ; и наоборот, уравнения (3.77,3.78) применимы при  $\tau$ , но только если  $\Lambda \ll 1$ .

Кроме того, мы опять замечаем из (3.82), что инкремент альфвеновской неустойчивости пропорционален продольной компоненте волнового вектора  $k_{\parallel}$  и достигает максимального значения для мод с азимутальным распространением ( $k_x = 0$ ), когда он становится независимым от поперечного волнового вектора  $k_{\perp}$ . Если мода распространяется в радиальном направлении,  $k_x/k_y \rightarrow \infty$ , то инкремент стремится к нулю.

### 3.4 Продольное электрическое поле, обусловленное сцеплением альфвеновской и компрессионной мод

Существует ряд экспериментальных свидетельств, что УНЧ-волны отвечают за ускорение авроральных электронов [Zhang et al., 2012; Mende, 2016; Keiling, 2021]. Предположительно, главную роль в ускорении частиц играет продольное электрическое поле ( $E_{\parallel}$ ) волны. Однако в одножидкостной МГД принимается  $E_{\parallel} = 0$ . Таким образом, нужно принимать во внимание различные кинетические эффекты. Наиболее очевидным из них является сцепление альфвеновской волны с электростатической модой за счет инерции электронов или конечного ларморовского радиуса ионов, что приводит к появлению электростатического потенциала волны и в конечном итоге продольного электрического поля  $E_{\parallel}$  [Hasegawa, 1976; Lysak and Lotko, 1996]. Однако этот механизм не является достаточно эффективным.

В этом разделе мы рассмотрим другой механизм появления продольного электрического поля. Предлагаемый механизм является двухступенчатым. На первом этапе у альфвеновской волны формируется продольное магнитное поле благодаря сцеплению с компрессионной модой за счет кривизны силовых линий и конечного давления плазмы. На втором этапе компрессионная мода сцепляется с электроста-

тической, как требуется условием квазинейтральности плазмы. В итоге у альфвеновской волны появляется продольное электрическое поле.

### 3.4.1 Исходные уравнения

В данном разделе мы по-прежнему рассматриваем 1-мерно-неоднородную цилиндрическую модель магнитосферы. Равновесная функция распределения  $F$  предполагается максвелловской (3.1), условие равновесия записывается в виде (3.2). Волна описывается уравнениями гирокинетики [Antonsen and Lane, 1980; Catto et al., 1981; Chen and Hasegawa, 1991]. Как и в разделах 3.1, 3.3, волновыми переменными считаются  $\psi$ , через которую выражается поперечное электрическое поле волны,  $b$ , через которую выражается продольное магнитное поле. Однако в дополнение к ним мы используем также третью переменную, «продольный потенциал»  $\phi_{\parallel} = \phi - \psi$  где  $\phi$  — электростатический потенциал волны. Продольное электрическое поле связано с  $\phi_{\parallel}$  выражением  $E_{\parallel} = -ik_{\parallel}\phi_{\parallel}$ .

Продольное электрическое поле волны считается малым по сравнению с поперечным, что выражается в виде  $\phi_{\parallel} \ll \psi$ . Таким образом, структура волнового поля выражается в основном через переменные  $b$  и  $\psi$ , связанные между собой посредством поперечного (3.5) и продольного (3.6) закона Ампера. И уже определив таким образом величины  $b$  и  $\psi$ , с помощью условия квазинейтральности мы находим величину  $\phi_{\parallel}$ .

Для наших целей достаточно ограничить себя пределом  $\omega \gg \omega_*$ . Тогда из системы (3.5, 3.6) находится продольное магнитное поле, привязанное к альфвеновской волне:

$$B_{\parallel} = \frac{ck_y}{\omega} \left( \frac{4\pi P'}{B^2} + \frac{2}{R} \frac{6\pi P}{B^2} \right) \psi. \quad (3.83)$$

По порядку величины

$$B_{\parallel} \sim \frac{ck_y}{\omega} \frac{\beta}{L_{\perp}} \psi. \quad (3.84)$$

В пределе  $\omega \gg k_{\parallel} V_{\parallel}$ ,  $\omega \gg \omega_*$  условием квазинейтральности записывается в виде

$$\sum_{i,e} \frac{q^2}{m} \left\langle (1 - J_0^2) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \phi_{\parallel} \right\rangle = \sum_{i,e} \frac{q^2}{m} \left\langle -(1 - J_0^2) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \psi + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{v_{\perp} J_0 J_1}{k_{\perp} c} B_{\parallel} \right\rangle. \quad (3.85)$$

Здесь треугольные скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по пространству скоростей,  $q$  и  $m$  — заряд и масса частиц, соответственно,  $J_n = J_n(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_c)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $\varepsilon = v^2/2$  — энергия в расчете на единицу массы. Уравнение (3.85) легко получается из уравнения (12) статьи [Chen and Hasegawa, 1991] для случая круговых силовых линий. Ларморовский радиус волны будем считать малым:  $k_{\perp} \rho_i \ll 1$ . Тепловые скорости электронов будем считать большими по сравнению с продольной компонентой фазовой скорости волны:  $V_{\parallel} \gg \omega/k_{\parallel}$ .

Уравнение (3.85) описывает генерацию продольного электрического поля поперечным электрическим полем и продольным магнитным полем, уже определенными из системы (3.5, 3.6).

Найдем соотношение между продольным и поперечным электрическим полем в случае однородной плазмы, когда у альфвеновской волны нет продольного магнитного поля. Тогда уравнение (3.85) переписется в виде

$$\left[ \frac{q^2}{m_e V_e^2} - \frac{q^2 k_{\parallel}^2}{m_i \omega^2} \right] \phi_{\parallel H} = -\frac{k_{\perp}^2 m_i c^2}{B^2} \psi. \quad (3.86)$$

Нижний индекс  $H$  означает, что рассматривается однородная плазма.

Пусть частота волны много больше величины  $v_s k_{\parallel}$ , где  $v_s = v_e \sqrt{m_e/m_i}$  — ионно-звуковая скорость. Тогда, учитывая соотношения  $E_{\parallel} = -ik_{\parallel} \phi_{\parallel}$ ,  $E_{\perp} = -ik_{\perp} \psi$ , уравнение (3.86) сводится к виду

$$E_{\parallel H} = -(k_{\perp} \rho_i)^2 \frac{T_e}{T_i} \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} E_{\perp}. \quad (3.87)$$

Как видим, ввиду малости ларморовского радиуса ионов выполняется соотношение  $E_{\parallel H} \ll E_{\perp}$ .

В противоположном случае  $\omega \ll v_s k_{\parallel}$  следует удерживать только второе слагаемое в левой части (3.86), и продольное электрическое поле окажется равным

$$E_{\parallel H} = \frac{k_{\perp} \omega^2}{k_{\parallel} \omega_{ci}^2} E_{\perp}. \quad (3.88)$$

Соотношение  $E_{\parallel H} \ll E_{\perp}$  выполняется снова, на этот раз ввиду малости частоты волны по сравнению с гирочастотой ионов.

Уравнения (3.87, 3.88) подтверждают, что в однородной плазме продольное электрическое поле альфвеновской волны очень мало по сравнению с поперечным.

### 3.4.2 Продольное электрическое поле альфвеновской волны в неоднородной плазме

Удерживая в (3.85) члены с  $\psi$  and  $B_{\parallel}$ , получаем после интегрирования:

$$\left[ \frac{q^2}{m_e v_e^2} - \frac{q^2 k_{\parallel}^2}{m_i \omega^2} \right] \phi_{\parallel} = -\frac{k_{\perp}^2 m_i c^2}{B^2} \psi + \frac{q}{B} B_{\parallel}. \quad (3.89)$$

Продольное магнитное поле  $B_{\parallel}$  выражается через  $\psi$  согласно (3.84). Поперечное и продольное электрические поля выражаются через  $\psi$  как  $E_{\perp} = -ik_{\perp} \psi$ ,  $E_{\parallel} = -ik_{\parallel} \phi_{\parallel}$ .

В случае холодных электронов ( $\omega \gg v_s k_{\parallel}$ ) получаем:

$$E_{\parallel} = -(k_{\perp} \rho_i)^2 \frac{T_e}{T_i} \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \left[ 1 - \frac{\omega_{ci} k_y}{\omega k_{\perp}^2} \left( \frac{4\pi P'}{B^2} + \frac{2}{R} \frac{6\pi P}{B^2} \right) \right] E_{\perp}. \quad (3.90)$$

По порядку величины, продольное электрическое поле оказывается равным

$$E_{\parallel} \sim \frac{\rho_i}{L_{\perp}} \frac{T_e}{T_i} \beta^{3/2} E_{\perp}. \quad (3.91)$$

В случае горячих электронов ( $\omega \ll v_s k_{\parallel}$ ) имеем:

$$E_{\parallel} = \frac{k_{\perp} \omega^2}{k_{\parallel} \omega_{ci}^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{ci} k_y}{\omega k_{\perp}^2} \left( \frac{4\pi P'}{B^2} + \frac{2}{R} \frac{6\pi P}{B^2} \right) \right] E_{\perp}, \quad (3.92)$$

или по порядку величины

$$E_{\parallel} \sim \frac{\omega}{\omega_{ci} k_{\parallel} L_{\perp}} E_{\perp}. \quad (3.93)$$

Хотя в обоих случаях продольное электрическое поле мало по сравнению с поперечным, оно все же в

$$\eta = \frac{E_{\parallel}}{E_{\parallel H}} \sim \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{\beta}{k_{\perp} L_{\perp}} \quad (3.94)$$

раз больше чем в однородной плазме согласно (3.87) и (3.88). Для типичных частот геомагнитных пульсаций в диапазоне Pc5 и азимутальных волновых чисел  $m \sim 5$ , этот фактор по порядку величины равен  $\eta \sim 10^2-10^3$ .

В ряде работ предполагается ускорение заряженных частиц (особенно частиц радиационных поясов) не продольным, а поперечным полем альфвеновской волны [Elkington, 2006; Shprits et al., 2008; Ukhorskiy et al., 2009]. Рассмотрим относительную эффективность этого механизма и предложенного нами.

Работа продольного электрического поля волны за единичное время выражается как

$$\frac{\delta_{\parallel}\varepsilon}{\delta t} = q\vec{v}_{\parallel} \cdot \vec{E}_{\parallel}, \quad (3.95)$$

в то время как работа поперечного электрического поля

$$\frac{\delta_{\perp}\varepsilon}{\delta t} = q\vec{u}_d \cdot \vec{E}_{\perp}, \quad (3.96)$$

где  $u_d$  — скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле, по порядку величины равная

$$u_d \sim V_i \frac{\rho_i}{L_{\perp}}. \quad (3.97)$$

В случае холодных электронов ( $\omega \gg v_s k_{\parallel}$ ) работа параллельного и поперечного электрического поля относится как

$$\frac{\delta_{\parallel}\varepsilon}{\delta_{\perp}\varepsilon} \sim \frac{T_e}{T_i} \beta^{3/2}. \quad (3.98)$$

В случае горячих электронов ( $\omega \ll v_s k_{\parallel}$ ) это отношение равно

$$\frac{\delta_{\parallel}\varepsilon}{\delta_{\perp}\varepsilon} \sim \beta^{1/2} \quad (3.99)$$

(здесь учтено, что для альфвеновской волны  $\omega \sim k_{\parallel} v_A$ ). В обоих случаях это отношение оказывается весьма значительной величиной.

Оценки (3.94, 3.98, 3.99) доказывает важность учета сцепления с компрессионной модой для генерации продольного электрического поля у альфвеновской волны.

### 3.5 Выводы к Главе 3

Перечислим основные результаты, полученные в данной главе.

1. Изучена пространственная структура в космической плазме альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод в модели, учитывающей кривизну линии поля и неоднородность плазмы и магнитного поля поперек магнитных оболочек. Обнаружено, что возмущение локализовано в двух областях прозрачности. Обе области ограничены резонансной поверхностью и поверхностью отсечки, где радиальная компонента волнового вектора обращается в бесконечность и ноль, соответственно. Получены условия неустойчивости и выражения для инкрементов сцепленных мод за счет взаимодействия с частицами. В альфвеновской области прозрачности неустойчивость возникает при наличии отрицательного градиента температуры плазмы. В дрейфово-компрессионной области прозрачности необходимым условием неустойчивости является рост температуры с радиальной координатой.

2. Изучен аналог баллонной неустойчивости в гирокинетике для сцепленных альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод с учетом эффектов конечного плазменного давления, кривизны силовых линий и диамагнитного дрейфа. Использована модель с постоянной кривизной линий магнитного поля, которая позволила получить аналитические результаты. Частоты альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод зависят от значения равновесного тока в плазме. При росте тока частоты этих двух ветвей приближаются друг к другу. При некотором критическом значении тока и ветви сливаются, и развивается неустойчивость, названная дрейфово-баллонной неустойчивостью сцепления. Эта неустойчивость имеет три основных отличия от обычной магнитогидродинамической баллонной неустойчивости: (1) дрейфово-баллонная неустойчивость сцепления не является аperiodической, существует действительная часть частоты колебаний порядка частоты дрейфа, (2) неустойчивыми могут быть только моды с тем же направлением азимутальной фазовой скорости, что и скорость диамагнитного дрейфа ионов, (3) порог неустойчивости зависит от частоты диамагнитного дрейфа.

3. Рассмотрена устойчивость сцепленных альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод в рамках гирокинематики. Введен параметр сцепления, пропорциональный квадрату радиального градиента давления. Получено и решено дисперсионное соотношение для сцепленных мод при различных значениях параметра связи. При наличии сцепления существенно изменяется частота зеркально-дрейфовой моды, зеркальная неустойчивость может развиваться при более низких значениях анизотропии плазмы. Сцепление с зеркально-дрейфовой модой также вызывает уменьшение частоты альфвеновской моды и приводит к неустойчивости, инкремент которой пропорционален параметру сцепления. При сильном сцеплении моды сливаются, поэтому понятия альфвеновской и зеркально-дрейфовой мод утрачивают свое значение. Вместо них введены другие понятия: неустойчивых и устойчивых альфвеновско-зеркальных мод, первая из которых неустойчива при любом значении анизотропии, а вторая, напротив, всегда затухает. Следствием сцепления является также поперечная дисперсия мод, то есть зависимость частоты волны от поперечной составляющей волнового вектора. Этот эффект может быть ответственен за передачу энергии поперек силовых линий.

4. Предложен двухэтапный механизм генерации параллельного электрического поля альфвеновской волны. На первом этапе сцепление альфвеновской волны с компрессионной модой из-за неоднородности магнитного поля и конечного давления плазмы приводит к появлению у альфвеновской волны продольного магнитного поля. На втором этапе продольное магнитное поле приводит к наличию параллельного электрического поля из-за связи электростатической модой, обусловленного условием квазинейтральности. Параллельное электрическое поле, генерированное таким механизмом, значительно больше, чем параллельное электрическое поля кинетической альфвеновской волны.

Основное содержание этой главы основано на публикациях из списка в разделе «Общая характеристика работы»: [1, 15, 16, 18, 19].

## Глава 4

# Резонаторы для компрессионных волн в магнитосфере

Как уже было сказано во Введении, представление о резонаторах имеет большое значение в физике космической плазмы, поскольку резонаторы являются естественными накопителями волновой энергии в магнитосфере, которая может быть израсходована, например, на ускорение заряженных частиц или нагрев ионосферы. В этом случае волновая энергия распространяется только вдоль азимута, будучи замкнутой поперек магнитных оболочек и вдоль силовых линий. Ранее такие УНЧ-резонаторы исследовались для быстрого магнитного звука и альфвеновских волн. Однако до сих пор не проводились исследования возможности существования резонаторов для длиннопериодных компрессионных мод, имеющих кинетическую природу — дрейфово-компрессионных и зеркально-дрейфовых мод. Отчасти это связано с тем, что существование резонатора возможно только при наличии радиальной дисперсии, то есть зависимости частоты волны от радиальной компоненты волнового вектора (если рассмотрение ведется в поперечной ВКБ-приближении). Однако у вышеупомянутых компрессионных мод частота, в первом приближении, зависит только от азимутальной компоненты волнового вектора (числа  $m$ ). Тем не менее, у этих мод радиальная дисперсия возникает при учете сцепления с альфвеновской волной из-за неоднородности плазмы, а также при учете эффектов конечного ларморовского радиуса ионов. Эти вопросы будут разобраны в данной главе.

Важность рассмотрения возможности существования резонаторов для кинетических компрессионных мод обусловлена тем, что компрессионные моды регулярно наблюдаются в космической плазме (диапазон Pc5), особенно в периоды геомагнитной активности, и, вероятно, играют заметную роль в явлениях космической погоды. Так, было отмечено, что эти пульсации могут иметь большое значение для ускорения электронов радиационных поясов и их переноса поперек магнитных оболочек [Ukhorskiy et al., 2009] и в некоторых видах авроральных явлений [Vaivads et al., 2001].

## 4.1 Резонаторы для зеркально-дрейфовой моды

### 4.1.1 Роль сцепления мод

Рассмотрим 1-мерную модель магнитосферы с силовыми линиями равновесного магнитного поля  $B_0$ , имеющими постоянную кривизну, как в разделе 3.1. Все параметры плазмы меняются только поперек магнитных оболочек. Отношение плазменного давления к магнитному  $\beta \sim 1$ , но в плазме имеется популяция холодных электронов, обеспечивающих закорачивание продольного электрического поля ( $E_{\parallel} = 0$ ). Концентрация частиц одного знака  $n$ . Равновесная функция распределения  $F$  предполагается бимаксвелловской (3.52), средние скорости движения вдоль и поперек поля  $V_{\parallel}$  и  $V_{\perp}$ . Продольная и поперечная компоненты равновесного давления  $P_{\parallel}$  и  $P_{\perp}$ . Температура плазмы полагается неизменной во всем ее объеме. Анизотропия плазмы характеризуется параметром  $\alpha = (T_{\parallel} - T_{\perp})/T_{\perp}$ . Тогда уравнения гирокинетики записываются в виде (3.5, 3.6), общее дисперсионное уравнение — в виде (3.23). Для удобства перепишем его в виде:

$$L_A - k_y^2 \frac{L_c^2}{L_M} = 0. \quad (4.1)$$

Операторы  $L_A$ ,  $L_M$ ,  $L_c$  в «зеркальном» пределе (3.56) даются выражениями (3.58, 3.57, 3.59). Остальные определения см. в разделе 3.3.1.

Выразим из (4.1) радиальную компоненту волнового вектора:

$$k_r^2(\omega, r) = -K^2 \frac{\omega - \omega_*(r) - i\gamma_M(r) - i\Omega_c(r)}{\omega - \omega_*(r) - i\gamma_M(r)}. \quad (4.2)$$

Здесь введены обозначения:

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_{\parallel} V_{\parallel}}{\beta_{\perp}} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \frac{1}{\tilde{L}_P} \left( \frac{4\pi P'_{\perp}}{B_0^2} \right)^2, \quad (4.3)$$

$$L_T(\omega, r) = \sigma k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{v_A^2}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{L}_P = L_T - \frac{4\pi}{B_0^2} \left( P'_{\perp} \frac{B'_0}{B_0} - \frac{P'_{\parallel}}{r} \right), \quad (4.5)$$

$$\gamma_M = -\tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \frac{k_{\parallel} V_{\parallel}}{\beta_{\perp}} \quad (4.6)$$

$$K^2 = k_y^2 \frac{\tilde{L}_P}{L_T},$$

Будем рассматривать волны с  $\text{Re } \omega \sim \omega_*$ . Введем величины  $\Omega_T$  и  $\tilde{\Omega}_P$ , определяемые из уравнений  $L_T(\Omega_T) = 0$  и  $\tilde{L}_P(\tilde{\Omega}_P) = 0$ . Это тороидальная и полоидальная частоты альфвеновской волны. Пусть частота волны  $\omega$  много меньше любой из них. Тогда в области локализации моды альфвеновский оператор значительно отличается от нуля. В этом случае выражение (4.2) можно трактовать как дисперсионное выражение зеркально-дрейфовой моды, модифицированной сцеплением с альфвеновской модой. Как видим, эта модификация приводит к появлению поперечной дисперсии зеркально-дрейфовой моды.

Уравнение (4.2) является уравнением главного порядка ВКБ-приближения для зеркально-дрейфовой моды. Это позволит нам получить некоторую информацию о пространственной структуре зеркально-дрейфовой моды.

Рассмотрим моды с  $k_r \simeq 0$ , локализованные поперек магнитных оболочек. Это возможно в тех регионах, где функции  $\Omega_c(r)$  и  $\omega_*(r)$  достигают своих экстремальных значений, причем их положения практически точно совпадают друг с другом.

Из (4.2) видно, что при  $k_r \simeq 0$  реальная и мнимая части частоты определяются выражениями

$$\text{Re } \omega \simeq \omega_{*0}, \quad \text{Im } \omega \simeq \Omega_{c0} + \gamma_{M0}. \quad (4.7)$$

Здесь индекс «0» обозначает экстремальные значения соответствующих величин. Для определенности рассмотрим точку  $r_0$ , где величины  $\Omega_c$  и  $\omega_*$  положительны.

Если масштабы их изменения по радиальной координате примерно одинаковы, то можно воспользоваться квадратичными разложениями

$$\Omega_c = \Omega_{c0} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right),$$

$$\omega_* = \omega_{*0} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Здесь  $x = r - r_0$  and  $l$  – характерный масштаб неоднородности плазмы. Все остальные величины, входящие в (4.2), можно считать примерно постоянными в области локализации моды. Если приближенные равенства (4.7) выполнены, выражение (4.2) сводится к виду

$$k_r^2 = \frac{K^2}{\Omega_{c0}} \left[ (\gamma_{M0} + \Omega_{c0}) + i(\omega - \omega_{*0}) - (\Omega_{c0} - i\omega_{*0}) \frac{x^2}{l^2} \right]. \quad (4.8)$$

Условие поперечной мелкомасштабности моды  $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$  в конце-концов сводится к виду  $Kl \gg 1$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение, которое в главном порядке ВКБ-приближения сводится к виду (4.8). Простейшее такое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{K^2}{\Omega_0} \left[ (\gamma_{M0} + \Omega_{c0}) + i(\omega - \omega_{*0}) - (\Omega_{c0} - i\omega_{*0}) \frac{x^2}{l^2} \right] f = 0. \quad (4.9)$$

Разумеется, можно ввести множество таких уравнений, отличающихся друг от друга первой производной от функции  $f(x)$ , описывающей амплитуду волны. Но слагаемые вида  $df/dx$  не влияют на собственные значения  $\omega$ , поэтому достаточно ограничиться (4.9). Граничное условие к этому уравнению – ограниченность функции  $f$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Введем новую переменную  $\zeta = x/\lambda$ , где  $\lambda$  находится из условия

$$K^2 l^{-2} \lambda^4 (1 - i\omega_{*0} \Omega_{c0}^{-1}) = 1.$$

При извлечении корня из  $\lambda^4$  нужно руководствоваться условием спадания функции  $f$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Отсюда следует  $\text{Re } \lambda^{-2} > 0$ , т.е.

$$\lambda^2 = \frac{l}{|K|} \left( 1 + \frac{\omega_{*0}^2}{\Omega_{c0}^2} \right)^{-1/4} e^{i\phi/2}, \quad (4.10)$$

где

$$\cos \phi = \Omega_{c0} / \sqrt{\Omega_{c0}^2 + \omega_{*0}^2}, \quad \sin \phi = \omega_{*0} / \sqrt{\Omega_{c0}^2 + \omega_{*0}^2}. \quad (4.11)$$

По порядку величины,  $\lambda \sim \sqrt{l/K}$ . Введем также обозначение

$$\theta = \frac{\Omega_{c0} + \gamma_{M0} - \gamma}{\sqrt{(\Omega_{c0} + \gamma_{M0} - \gamma)^2 + (\omega - \omega_{*0})^2}},$$

где  $\gamma$  – мнимая часть частоты волны. Теперь (4.9) сводится к виду

$$\frac{d^2 f}{d\zeta^2} + (\theta - \zeta^2)f = 0.$$

Это задача на собственные значения величины  $\theta$ ,

$$\operatorname{Re} \theta = 2n + 1, \quad \operatorname{Im} \theta = 0,$$

где  $n$  – целое число. Отсюда получаем собственные значения инкремента неустойчивости  $\gamma$  и реальной части частоты волны:

$$\gamma_n = (\Omega_{c0} + \gamma_{M0}) - \frac{2n + 1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_{c0}^{1/2}}{k_y l} \left[ \sqrt{\Omega_{c0}^2 + \omega_{*0}^2} + \Omega_{c0} \right]^{1/2}, \quad (4.12)$$

$$\operatorname{Re} \omega_n = \omega_{*0} + \frac{2n + 1}{\sqrt{2}} \frac{\Omega_{c0}^{1/2}}{k_y l} \left[ \sqrt{\Omega_{c0}^2 + \omega_{*0}^2} - \Omega_{c0} \right]^{1/2} \quad (4.13)$$

(отметим соответствие полученных выражений формулам (4.7), которое имеет место при  $Kl \gg 1$ ). Решение уравнения (4.9) записывается в виде

$$f(r) = H_n \left( \frac{r - r_0}{\lambda} \right) \exp \left[ -\frac{(r - r_0)^2}{2\lambda^2} \right], \quad (4.14)$$

где  $H_n$  – полином Эрмита.

Обсудим полученное решение.

Неустойчивость развивается при  $\gamma_n > 0$ . Как видно из (4.12), сцепление с альфвеновской модой (отражаемое величиной  $\Omega_c$ ) оказывает существенное влияние на устойчивость. При высоких номерах гармоник,  $n \gg 1$ , сцепление способствует устойчивости плазмы. При низких номерах,  $n \sim 1$ , второе слагаемое (4.12) существенно меньше первого из-за большой величины  $Kl$ , т.е. сцепление работает на неустойчивость. При этом отрицательность величины  $\tau$  (входящей в определение  $\nu$ ) также способствует неустойчивости, но даже при  $\tau > 0$  возможна неустойчивость.

Реальная часть собственной частоты растет с ростом номера гармоники. Рост этот, однако, довольно медленный ввиду наличия множителя  $(Kl)^{-1}$  во втором

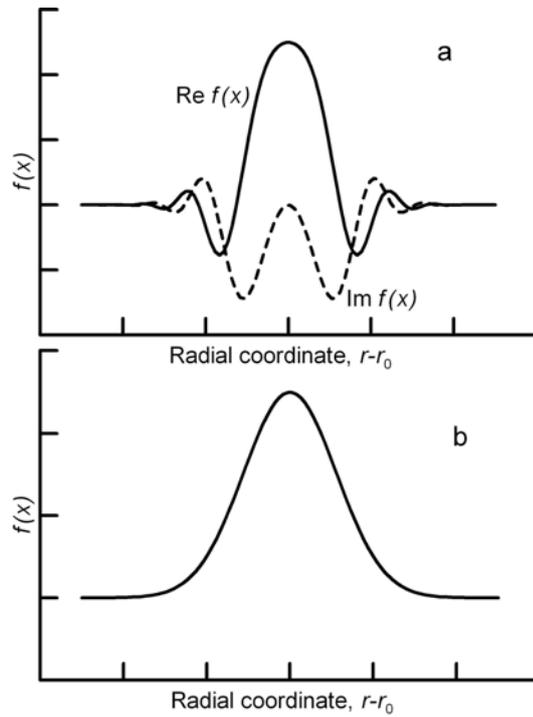


Рисунок 60. Поперечная структура зеркально-дрейфовой моды в случаях: а)

$\Omega_{c0} \sim \omega_{*0}$  (показаны величины  $\text{Re } f(x)$ ,  $\text{Im } f(x)$ ); б)  $\Omega_{c0} \gg \omega_{*0}$

слагаемом (4.13). Поэтому частота волны практически совпадает с  $\omega_{*0}$ . Это близко к частотам реально наблюдаемых в магнитосфере УНЧ-волн (в том числе, компрессионных буревых пульсаций Pc5).

Радиальная структура волны, описываемая формулой (4.14), схематически показана на рис. 60. В общем случае  $\Omega_{c0} \sim \omega_{*0}$ , и структура имеет осцилляторный характер даже при  $n = 0$  (рис. 60,а), причем амплитуда модулирована функцией Гаусса. Наличие мнимой части у  $\lambda^2$  приводит к тому, что волна распространяется поперек магнитных оболочек. Реальная часть радиальной компоненты волнового вектора есть  $\text{Re } k_r = (r - r_0)|K|l^{-1}|\lambda^{-2}|\sin(\phi/2)$ . Поскольку по определению величины  $\phi$  (4.11) знак  $\sin \phi$  совпадает со знаком  $\omega_{*0}$ , и эта величина положительна в точке  $r_0$ , то  $\sin(\phi/2) > 0$ . Поэтому фазовая скорость волны направлена от поверхности  $r_0$ . Как видно из (4.10), при этом  $k_r$  не зависит от  $\omega$ , т.е. энергия поперек магнитных оболочек не переносится (как в альфвеновской волне в однородной плазме). Волна является стоячей поперек силовых линий (рис. 60,б) только в случае  $\sin(\phi/2) = 0$ . Как видно из (4.11), это возможно если  $\omega_{*0} \ll \Omega_{c0}$ .

Рассмотрим условия применимости выражений, полученных в данном разделе. Условие  $\omega \ll k_{\parallel} V_{\parallel}$  накладывает ограничения на значения реальной и мнимой частей частоты волны. Реальная частота волны близка к дрейфовой частоте, которая по порядку величины равна  $\omega_* \sim k_y \rho_i v_T l^{-1}$ , где  $\rho_i$  – ларморовский радиус ионов,  $v_T$  – характерная тепловая скорость частиц. Неравенство  $\omega_* \ll k_{\parallel} V_{\parallel}$  выполняется при условии  $(k_y \rho_i)/(k_{\parallel} l) \ll 1$ . Вклад в мнимую частоту волны вносят  $\gamma_M$  и  $\Omega_c$ . Условие  $\gamma_M \ll k_{\parallel} V_{\parallel}$  при  $\beta_{\perp} \sim 1$  означает  $|\tau| \ll 1$ . Наконец,  $\Omega_c \ll k_{\parallel} V_{\parallel}$  возможно только при выполнении условия  $(k_{\parallel} l)^2 \gg 1$ . При этом реальная и мнимая части частоты имеют один порядок величины.

Наконец, рассмотрим поляризацию моды в резонаторе. Как следует из общих формул гирокинетики [Chen and Hasegawa, 1991], за поперечное магнитное поле волны отвечает продольная компонента вектор-потенциала  $A_{\parallel}$ , т.е. переменная  $\Psi \equiv (\omega/c k_{\parallel}) A_{\parallel}$ . Поскольку в резонаторе  $k_r \ll k_y$ , заключаем отсюда, что в поперечном магнитном поле волны доминирует радиальная компонента (волна имеет полоидальную поляризацию). Как нетрудно получить из системы (3.5, 3.6), поперечная и продольная компоненты магнитного поля относятся как

$$\frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} \sim \frac{4\pi P'_{\perp}}{\sigma k_{\parallel} B_0^2}.$$

Ввиду условия  $(k_{\parallel} l)^2 \gg 1$  отсюда следует, что продольная компонента магнитного поля доминирует над поперечной.

#### 4.1.2 Роль конечного ларморовского радиуса

В данном разделе мы пренебрежем сцеплением зеркальной моды с альфвеновской, но учтем конечный ларморовский радиус ионов. Стартовой точкой нашего анализа будет уравнение поперечного баланса сил, которое нетрудно получить из уравнений Власова [Pokhotelov et al., 2000]:

$$\delta P_{\perp} + \frac{B \delta B_{\parallel}}{4\pi} = \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \left[ \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_A^2} - 1 - \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right] \frac{B \delta B_{\parallel}}{4\pi}, \quad (4.15)$$

где  $k_{\perp}^2 = k_r^2(r) + k_y^2$ . Пренебрежем слагаемым  $\omega^2/k_{\parallel}^2 v_A^2$ , поскольку мы рассматриваем частоты много меньше альфвеновской. Сцепление с альфвеновской модой

будем считать пренебрежимо малым, но отношение  $k_{\parallel}/k_{\perp}$  будем считать конечным. Тогда уравнение (4.15) приводится к виду

$$L_M b = 0. \quad (4.16)$$

Здесь  $b = \omega \delta B_{\parallel}/c$ . Оператор

$$L_M = k_{\perp}^2 (\tau + a_M) + k_{\parallel}^2 \left( 1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right) \quad (4.17)$$

является компрессионным оператором при конечном отношении  $k_{\parallel}/k_{\perp}$ . Остальные обозначения:

$$\begin{aligned} \tau = & 1 + \frac{4\pi}{c^2} 2\pi \sum_{e,i} \frac{q^2}{m} \\ & \times \int dv_{\parallel} dv_{\perp} v_{\perp}^3 J_1^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) \left( \frac{1}{V_{\perp}^2} - \frac{1}{V_{\parallel}^2} \right) F, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} a_M = & \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \frac{1}{k_{\parallel} k_{\perp}^2} 2\pi \sum_{e,i} \frac{q^2}{m} \int dv_{\parallel} dv_{\perp} v_{\perp}^3 J_1^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_c} \right) \\ & \times \left( v_{\parallel} - \frac{\omega - \omega_d}{k_{\parallel}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{k_y F'}{\omega \omega_c} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Штрих обозначает дифференцирование по радиальной координате  $r$ ,  $\omega_c$  — гирочастота, и

$$\omega_d = \frac{k_y}{\omega_c} \left( \frac{B'}{2B} v_{\perp}^2 - \frac{v_{\parallel}^2}{r} \right)$$

дрейфовая скорость в неоднородном магнитном поле.

«Классическая» зеркально-дрейфовая мода возникает в пределе  $k_{\perp} \rho \rightarrow 0$ ,  $k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2 \rightarrow 0$ , и  $|\omega - \omega_d| \ll k_{\parallel} V_{\parallel}$ . В этом случае мы получаем из (4.16) хорошо известное дисперсионное уравнение из работы [Hasegawa, 1969]:

$$\operatorname{Re} \omega = \omega_*, \quad (4.20)$$

$$\operatorname{Im} \omega = -\tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_{\parallel} V_{\parallel}}{\beta_{\perp}} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}, \quad (4.21)$$

где  $\beta_{\perp} = 8\pi n m_i V_{\perp}^2 / B^2$ . Эти уравнения описывают волну с частотой  $\omega_*$  растущую при условии  $\tau < 0$ .

Теперь мы рассмотрим малые, но конечные величины  $\text{of } k_{\perp}\rho$ , где  $\rho$  — ларморовский радиус ионов. Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{3}{2}\beta_{\perp} \left( \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right), \quad \delta = \frac{k_{\parallel}^2}{k_y^2} \left( 1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right),$$

$$\omega_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_{\parallel} V_{\parallel}}{\beta_{\perp}} \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}, \quad \tilde{\tau} = \tau + \alpha k_y^2 \rho^2, \quad h = i \frac{\omega - \omega_*(r)}{\omega_t(r)}.$$

Тогда мы получаем следующее дисперсионное уравнение зеркально-дрейфовой моды:

$$k_{\perp}^2 [\tilde{\tau}(r) + \alpha k_r^2 \rho^2 - h(\omega, r)] + k_y^2 \delta = 0. \quad (4.22)$$

Если мода заперта поперек магнитных оболочек, то выполняется неравенство  $|k_r| \ll |k_y|$ . Уравнение (4.22) преобразуется к виду

$$k_r^2 \alpha \rho^2 + [\tilde{\tau}(r) - h(\omega, r) + \delta] = 0. \quad (4.23)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\alpha(r) k_r^2 \rho^2 - i \frac{\omega - \omega_0(r)}{\omega_t(r)} = 0 \quad (4.24)$$

где  $\omega_0$  — решение при  $k_r \rho = 0$  определенное равенством

$$\tilde{\tau}(r) - h(\omega_0, r) + \delta = 0.$$

Решение этого уравнения есть  $\omega_0 = \omega_*(r) + i\gamma_M(r)$ , где

$$\gamma_M = -(\tilde{\tau} + \delta)\omega_t.$$

Поскольку все величины в (4.24) являются функциями радиальной координаты  $r$ , радиальный волновой вектор  $k_r$  также должен зависеть от  $r$ . Поэтому уравнение (4.24) следует рассматривать как уравнение в ВКБ-приближении, определяющее функцию  $k_r = k_r(\omega, r)$ . Для определения величины  $\omega$  нужно вывести соответствующее дифференциальное уравнение и дополнить его граничными условиями. Простейший путь заключается в замене  $k_r$  дифференциальным оператором  $-id/dr$ . Получаем:

$$\rho^2 \alpha(r) \frac{d^2 f}{dr^2} + i \frac{\omega - \omega_0(r)}{\omega_t} f(r) = 0. \quad (4.25)$$

Здесь  $f(r)$  — волновая функция. Разумеется, любое уравнение, отличающееся от этого слагаемыми типа  $df/dr$  даст то же самое дисперсионное уравнение (4.24) (которое является главным порядком ВКБ-приближения), что и уравнение (4.25). Но члены с первой производной не оказывают влияния на собственные частоты  $\omega$  в приближении больших  $k_y$ , так что достаточно ограничиться рассмотрением уравнения (4.25). Естественным граничным условием по радиальной координате  $r$  является условие убывания  $|f|$  вне области локализации моды.

Далее, мы будем рассматривать локализацию моды вблизи точки  $r_m$ , где функция  $\omega_0(r)$  достигает максимума. Вблизи этой точки мы можем использовать разложение

$$\omega_0(r) = \omega_{0m} + (1/2)\omega_0''x^2,$$

где  $x = r - r_m$ , и индекс  $m$  означает значенияи функции вблизи точки  $r_m$ . Кроме того, мы будем рассматривать случай  $|\gamma| \ll |\omega_*|$ . Тогда

$$\omega_0'' \simeq -\frac{|\omega_{*m}|}{l^2},$$

где  $l$  есть характерный масштаб вариации дрейфовой частоты поперек магнитных оболочек. Обозначим

$$E = \frac{\omega - \omega_{0m}}{\omega_{tm}\rho_m^2\alpha_m},$$

Тогда уравнение (4.25) примет вид

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \left[ iE - \frac{i}{2} \frac{|\omega_*|}{\omega_t\alpha(\rho l)^2} x^2 \right] f = 0. \quad (4.26)$$

Граничное условие есть

$$|f(x \rightarrow \pm\infty)| \rightarrow 0, \quad (4.27)$$

т.е.  $|f|$  исчезает при  $|x| \rightarrow \infty$ . В (4.26) и ниже индекс "m" опущен, подразумевая что все равновесные параметры взяты в точке  $r_m$ .

Как видим, уравнение (4.26) имеет ту же самую форму, что и уравнение Шрёдингера для гармонического осциллятора, где величина  $E$  играет роль энергии. Вот решение этого уравнения:

$$f(x) = H_n \left( \frac{x}{\lambda} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\lambda^2} \right), \quad (4.28)$$

где  $H_n$  — полиномы Эрмита,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и  $\lambda$  — характеристическая длина волны определенная условием

$$\frac{i}{2} \lambda^4 \frac{|\omega_*|}{\omega_t \alpha (\rho l)^2} = 1.$$

Для вычисления квадратного корня из  $\lambda^4$ , мы используем граничное условие (4.27).

Отсюда следует, что  $\text{Re } \lambda^{-2} > 0$ , так что

$$\lambda^2 = e^{-i\pi/4} \left| \frac{2\omega_t \alpha}{\omega_*} \right|^{1/2} \rho l. \quad (4.29)$$

По порядку величины,  $\lambda \sim O(\sqrt{\rho l})$ .

Условие квантования имеет вид  $iE\lambda^2 = 2n + 1$ , следовательно

$$\text{Re } \omega_n = \omega_* + \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\rho}{l} \sqrt{\alpha \omega_t |\omega_*|}, \quad (4.30)$$

$$\gamma_n = \text{Im } \omega_n = \gamma_M - \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\rho}{l} \sqrt{\alpha \omega_t |\omega_*|}. \quad (4.31)$$

Следуя статье [Hasegawa, 1969], введем параметр

$$\Delta = \frac{3}{4} \left[ \beta_{\perp} \left( \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right) - 1 \right]$$

представляющий собой меру превышения порога неустойчивости. Инкремент достигает максимальной величины когда  $\partial \gamma_M / \partial k_{\parallel} = 0$ ,  $\partial \gamma_M / \partial k_y = 0$ . Таким образом, инкремент наиболее высок при значении компонент волнового вектора

$$k_y^* = \frac{1}{\rho} \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{\Delta}{\frac{4\Delta}{3} + 1}}, \quad \delta^* = \frac{\Delta}{3},$$

$$k_{\parallel}^* = \sqrt{\frac{2}{27} \frac{\Delta \Upsilon}{\rho}}, \quad (4.32)$$

где

$$\Upsilon = \left( 1 + \frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2} \right)^{-1/2} \left( \frac{4\Delta}{3} + 1 \right)^{-1/2}.$$

При  $\Delta > 0$  обе величины  $k_y^*$  и  $k_{\parallel}^*$  реальны. Максимальное значение инкремента достигает

$$\gamma_M^* = \frac{2}{\sqrt{27\pi}} \frac{V_{\parallel} T_{\parallel}}{\beta_{\perp} T_{\perp}} \frac{2}{3\rho} |\Delta| \Delta \Upsilon.$$

Как видим, условием неустойчивости ( $\gamma > 0$ ) по прежнему остается неравенство  $\Delta > 0$ , как и в случае, когда пренебрегается ларморовским радиусом и конечностью отношения  $k_{\parallel}/k_y$ . По порядку величины,

$$\gamma_M^* \sim \Delta^2 \frac{V_{\perp}}{\rho}.$$

Как видим, по мере роста ларморовского радиуса инкремент уменьшается, но остается положительным. Однако, как следует из (4.31), неустойчивость стабилизируется когда радиальное волновое число  $n$  достигает критического значения

$$n_c \sim \left(\frac{L}{\rho}\right)^{3/2} \Delta^{5/4}.$$

Таким образом, эффекты конечного ларморовского радиуса способствуют уменьшению критического значения  $n$ .

В случае маргинальной неустойчивости, когда  $0 < \Delta \ll 1$  и  $k_{\parallel} = k_{\parallel}^*$ ,  $k_y = k_y^*$ , характерная радиальная длина волны есть

$$\lambda^* \sim L \left(\frac{\rho}{L}\right)^{1/4} \Delta^{1/8},$$

где  $L$  есть масштаб неоднородности. Как видим, величина  $\lambda^*$  слабо зависит от  $\rho/L$  и  $\Delta$ .

**Обсуждение.** На первый взгляд, конечный ларморовский радиус способствует стабилизации зеркально-дрейфовой неустойчивости, поскольку условие неустойчивости приобретает вид

$$\tau_0 + \alpha(k_y \rho)^2 + (k_{\parallel}/k_{\perp})^2 \left[1 + \frac{1}{2}(\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})\right] < 0.$$

Однако при оптимальных для неустойчивости значениях  $k_y$  и  $k_{\parallel}$  критерий неустойчивости остается таким же, как и в случае  $k_y \rho = 0$ :  $\Delta > 0$ . Эффекты конечного ларморовского радиуса влияют на неустойчивость другим образом: они снижают критическую величину радиального волнового числа. Эта величина  $n_c$  быстро убывает с увеличением  $\rho$ , и гармоники с  $n > n_c$  устойчивы.

Радиальная структура волны описывается уравнением (4.28). Наличие мнимой части частоты приводит к распространению волны поперек магнитных оболочек.

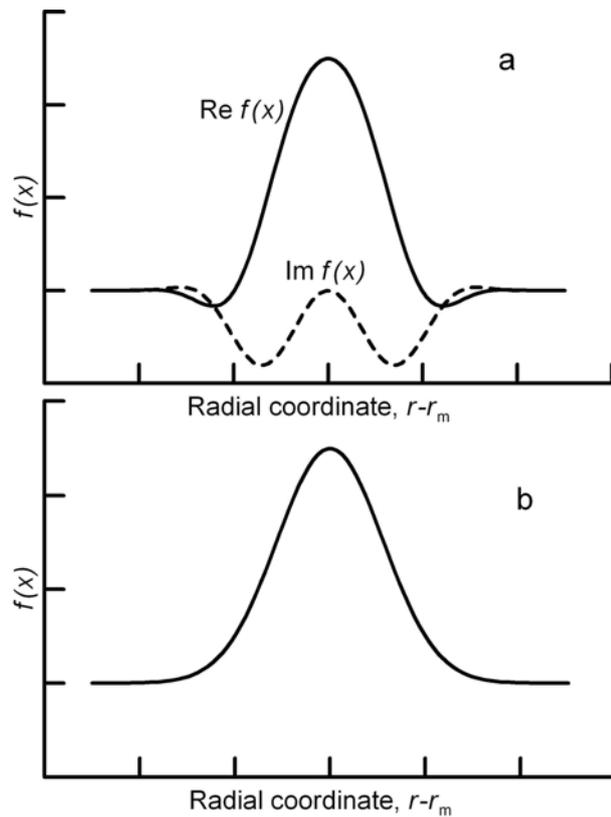


Рисунок 61. Структура зеркальной моды поперек магнитных оболочек в случаях:

$$\text{a) } |\gamma| \ll |\omega_*|, \text{ b) } |\gamma| \gg |\omega_*|$$

Реальная часть волнового вектора  $\text{Re } k_r = -x|\lambda^{-2}| \sin(\pi/4)$ ; то есть фазовая скорость направлена влево если  $r > r_m$  и вправо если  $r < r_m$ . Как показывает уравнение (4.29),  $k_r$  не зависит от  $\omega$ , поэтому энергия не передается поперек магнитных оболочек. Заметим, что осцилляторная структура имеет место даже для главной гармоники,  $n = 0$  (рис. 61). Волна промодулирована функцией Гаусса. Зависимость радиальной длины волны от величины ларморовского радиуса  $\rho$  и от меры превышения границы неустойчивости  $\Delta$  является сравнительно слабой.

Ситуация в районах минимума функции  $\omega_*(r)$  полностью аналогична, за исключением того, что радиальная фазовая скорость имеет противоположный знак.

Ситуация в случае  $|\gamma| \gg |\omega_*|$  почти полностью аналогична. Но в этом случае  $\text{Im } \lambda^2 = 0$ ; следовательно, мода является стоячей поперек магнитных оболочек (см. рис. 61,b).

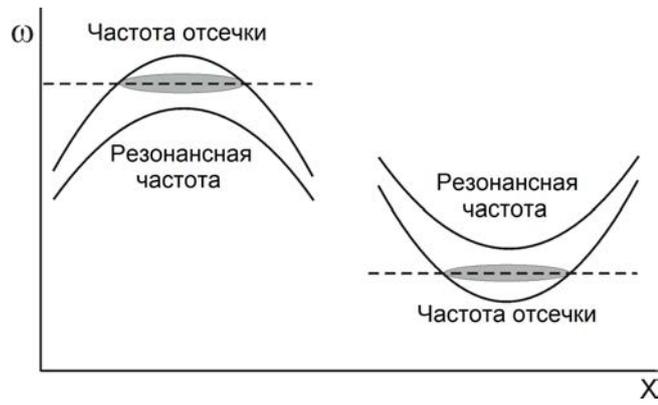


Рисунок 62. Положение поперечных резонаторов (серые овалы) вблизи максимумов и минимумов поверхностей отсечки

## 4.2 Резонаторы для дрейфово-компрессионной моды

Резонаторы для дрейфово-компрессионной (ДК) моды имеют большее значение, чем для зеркально-дрейфовой моды, поскольку ДК-мода может существовать в магнитосфере при более общих условиях: для этого достаточно наличия конечного плазменного давления и неоднородности плазмы. Рассмотрим, при каких условиях могут существовать такие резонаторы.

Как мы уже видели в разделе 3.1, радиальная компонента волнового вектора ДК-моды подчиняется уравнению

$$k_x^2 = k_y^2 \frac{\Omega_R(x) - \omega}{\omega - \Omega_M(x)}. \quad (4.33)$$

Резонатор может существовать, если частота отсечки  $\Omega_R(x)$  имеет экстремум. Собственная частота резонаторной моды определяется из условия, что между поверхностями отсечки должно укладываться целое число полуволн. Поскольку радиальный волновой вектор  $k_x$  зависит от частоты  $\omega$ , это приводит к квантованию частоты.

Расположен ли резонатор вблизи минимума или максимума частоты отсечки зависит от знака разности между резонансной частотой и частотой отсечки  $\Omega_M - \Omega_R$ . Как видно из (4.33), если эта разность положительна, тогда резонатор расположен вблизи минимума (поскольку в этом случае квадрат радиального волнового вектора положителен); если эта разность отрицательна, то резонатор расположен вблизи

максимума (рис. 62). Для дрейфово-компрессионной моды всегда  $\Omega_M - \Omega_R < 0$  и функция  $\Omega_R(x)$  может достичь максимума в регионах с экстремальными значениями  $\beta$  или  $\omega_*$ . Отметим, что компрессионные волны Pc5 обычно наблюдаются в регионах магнитосферы с повышенным давлением плазмы.

Отметим, что, если пренебречь взаимодействием волна-частица, собственная частота в ДК-резонаторе является действительной величиной. Это означает, что волновая энергия замкнута внутри этого резонатора и не «просачивается» поперек магнитных оболочек. В этом заключается существенное отличие ДК-резонатора от резонатора для зеркально-дрейфовых мод, где собственная частота имеет комплексное значение и резонаторная мода не является, строго говоря, стоячей поперек магнитных оболочек.

### 4.3 Выводы к Главе 4

Перечислим основные результаты, полученные в данной главе.

1. Показана принципиальная возможность существования резонатора для зеркально-дрейфовых мод, обусловленная двумя факторами: сцеплению с альфвеновской модой и эффектам конечного ларморовского радиуса. Благодаря этим факторам у зеркально-дрейфовых мод появляется поперечная дисперсия, то есть возникает зависимость частоты от радиальной компоненты волнового вектора  $k_r$ . Получено волновое уравнение, определяющее как пространственную структуру моды, так и ее собственную частоту (действительную и мнимую части). Показано, что масштаб пространственной локализации волны определяется масштабом неоднородности плазмы и азимутальной компонентой волнового вектора. Ввиду наличия мнимой части частоты волны часть волновой энергии «просачивается» поперек магнитных оболочек, при этом ее амплитуда модулируется функцией Гаусса. Мнимая часть частоты определяет инкремент зеркальной неустойчивости, который принимает дискретный набор значений. Показано, что эффекты конечного ларморовского радиуса повышают порог зеркальной неустойчивости запертых мод, особенно для волн с большими азимутальными волновыми числами.

2. Установлена возможность существования резонатора поперек магнитных оболочек для дрейфово-компрессионных мод. Поперечная дисперсия в таком резонаторе обусловлена сцеплением с альфвеновской модой. Этот резонатор может существовать в областях магнитосферы с локальными экстремумами отношения плазменного давления к магнитному или частоты диамагнитного дрейфа. Резонатор может быть локализован вблизи максимума  $\Omega_R(x)$  как функции радиальной координаты.

Основное содержание этой главы основано на публикациях из списка в разделе «Общая характеристика работы»: [3, 8, 9].

## Заключение

1. Теоретически исследована пространственная структура и эволюция со временем альфвеновских волн в двумерно-неоднородной модели магнитосферы с учетом неустойчивости за счет взаимодействия «волна-частица». Учтена кривизна силовых линий и конечное давление плазмы. При этом волны считаются генерированными как монохроматическим, так и импульсным источниками. Установлено, что в обоих случаях неустойчивость в конечном итоге порождает тороидальную волну. Это связано с трансформацией волны из полоидальной в тороидальную, вызванную в первом случае поляризационным расщеплением спектра (в конечном итоге кривизной силовых линий) и разбеганием по фазам во втором случае.
2. Определена пространственная структура и эволюция со временем волнового поля стоячих азимутально-мелкомасштабных альфвеновских колебаний, генерированных источником конечной длительности во времени. Учтена кривизна силовых линий, приводящая к поляризационному расщеплению спектра. Установлена относительная роль различных факторов, приводящих к трансформации альфвеновских волн из полоидальных в тороидальные. Показано, что непосредственно после включения источника эволюция волны определяется явлением разбегания по фазам. Наличие поляризационного расщепления спектра приводит к формированию вблизи полоидальной поверхности волнового фронта, движущегося поперек магнитных оболочек по направлению к тороидальной поверхности. После прохождения волнового фронта в данной точке формируется практически установившаяся монохроматическая волна.

3. Определена пространственная структура и эволюция со временем волнового поля альфвеновских колебаний в моделях магнитосферы, генерированных импульсом поверхностного тока. Такие импульсы тока характерны для внезапного удара по магнитопаузе импульса давления солнечного ветра. Непосредственно после импульса в магнитном поле волны присутствуют как полоидальные, так и тороидальные компоненты. Обе компоненты колеблются в режиме биения, однако в полоидальной составляющей он более заметен, чем в тороидальной. Из-за разбегания по фазам энергия из полоидальной составляющей переходит в тороидальную. По прошествии времени волновое поле разделяется на тонкое ядро и широкий хвост колебания. Таким образом, на поверхности источника постепенно «вызревает» волна Альфвена с частотой, равной локальной альфвеновской частоте на этой поверхности. В хвосте волнового поля каждая силовая линия колеблется с локальной альфвеновской частотой на каждой магнитной оболочке.
4. Изучена генерация альфвеновской волны движущимся по азимуту облаком плазмы (например, возникшем при суббуревой инжекции заряженных частиц). Показано, что волна появляется в данной точке сразу после прохождения облака и далее распространяется по азимуту с фазовой скоростью, совпадающей со скоростью источника. В каждой точке частота волны равна собственной альфвеновской частоте на данной магнитной оболочке. Азимутальное волновое число равно отношению собственной альфвеновской частоты к дрейфовой частоте. При реалистичных предположениях о концентрации и энергии частиц амплитуды генерируемых волн близки к наблюдаемым.
5. Изучена пространственная структура стоячих медленных магнитозвуковых волн в модели плазмы с кривизной силовых линий и двумерной неоднородностью плазмы при учете сцепления с альфвеновской модой. Показано, что ММЗ запертым между двумя магнитными оболочками, на одной из которых имеется резонанс, на второй — отсечка. Волна распространяется от поверхности отсечки к резонансной поверхности, где полностью поглощается. Полу-

ченные результаты применены для изучения устойчивости корональных арок на Солнце относительно гофрированных колебаний. Установлено, что инкремент неустойчивости увеличивается с уменьшением продольной длины волны и радиального волнового числа.

6. Изучено сцепление альфвеновских и быстрых магнитозвуковых волн в магнитосфере, обогащенной тяжелыми ионами — например, в магнитосфере планеты Меркурий. Установлено, что наблюдаемые в магнитосфере Меркурия УНЧ-колебания следует отождествить с ионно-ионные гибридными модами.
7. Изучено сцепление альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод в цилиндрической модели магнитосферы. Получены критерии и инкременты неустойчивости сцепленных мод, возникающей за счет взаимодействия волна-частица. Рассмотрена пространственная структура этих мод поперек магнитных оболочек. Показано, что при сцеплении альфвеновских и дрейфово-компрессионных мод возникает кинетический аналог баллонной неустойчивости. Получен критерий развития этой неустойчивости.
8. Изучено развитие зеркально-дрейфовой неустойчивости в анизотропной плазме при учете сцепления с альфвеновской модой. Показано, что сцепление зеркальной и альфвеновской мод приводит к появлению новых ветвей колебаний. Изучены дисперсионные свойства этих мод.
9. Показано, что в магнитосфере могут существовать условия для возникновения поперечных резонаторов для компрессионных мод кинетической природы — дрейфово-компрессионных и зеркально-дрейфовых мод. Поперечная дисперсия в таких резонаторах обусловлена эффектами конечного ларморовского радиуса и сцепления с альфвеновской волной. Установлены условия неустойчивости собственных мод колебаний в таких резонаторах.

## Список литературы

- Агапитов А.В., Черемных О.К. Генерация солнечным ветром собственных УНЧ-мод магнитосферы Земли // Космическая наука и технология. — 2008. — Т. 14, № 4. — С. 72–81.
- Агапитов А.В., Черемных О.К. Поляризация резонансных УНЧ-возмущений в магнитосфере Земли // Кинематика и физика небесных тел. — 2011. — Т. 27. — С. 17–27.
- Агапитов А.В., Парновский А.С., Черемных О.К. Спектр поперечно-мелкомасштабных возмущений во внутренней магнитосфере Земли // Кинематика и физика небесных тел. — 2006. — Т. 22. — С. 387–401.
- Ахиезер А.И. и др. Электродинамика плазмы. — М. : Наука, 1974.
- Бойко А.Я., Черемных О.К. О влиянии высокоэнергетичных частиц на баллонные желобковые моды в токамаке // Физика плазмы. — 1988. — Т. 14. — С. 929–937.
- Бурдо О. С., Черемных О. К., Верхоглядова О. П. Изучение баллонных мод во внутренней магнитосфере Земли // Изв. АН. Сер. физ. — 2000. — Т. 64(9). — С. 1896–1900.
- Ваньян Л.Л., Абрамов Л.А., Альперович Л.С. и др. Геомагнитные пульсации. — М. : Наука, 1973.
- Волков М.А., Мальцев Ю.П. Желобковая неустойчивость внутренней границы плазменного слоя // Геомагнетизм и аэрономия. — 1986. — Т. 26. — С. 798–801.
- Головчанская И.В., Мальцев Ю.П., Корнилова Т.А. Перестановочная неустойчивость, связанная с азимутальным градиентом давления, как возможный механизм

- суббулевой активизации // Геомагнетизм и аэрономия. — 2004. — Т. 44. — С. 762–770.
- Головчанская И.В., Корнилов И.А., Корнилова Т.А. и др. Признаки альвеновского резонанса в поведении авроральных дуг перед началом суббури // Геомагнетизм и аэрономия. — 2018. — Т. 58. — С. 46–52.
- Гульельми А.В. Кольцевая ловушка для низкочастотных волн в магнитосфере Земли // Письма в ЖЭТФ. — 1970. — Т. 12. — С. 35–37.
- Гульельми А.В. Поляризационное расщепление спектра альвеновских колебаний магнитосферы // Геомагнетизм и аэрономия. — 1970а. — Т. 10. — С. 524–525.
- Гульельми А.В. МГД-волны в околоземной плазме. — М. : Наука, 1979.
- Гульельми А.В. Геомагнитные пульсации внемагнитосферного происхождения // Итоги науки и техники. Геомагнетизм и высокие слои атмосферы. — М. : ВИНТИ, 1984. — С. 114–151.
- Гульельми А.В., Золотухина Н.А. Возбуждение альвеновских колебаний магнитосферы асимметричным кольцевым током // Исслед. по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — 1980. — Вып. 50. — С. 129–138.
- Гульельми А.В., Поляков А.Р. О дискретности спектра альвеновских колебаний // Геомагнетизм и аэрономия. — 1983. — Т. 23. — С. 341–343.
- Гульельми А.В., Потапов А.С. Об особенностях поля МГД-волны в неоднородной плазме // Исслед. по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — 1984. — Вып. 70. — С. 149–157.
- Гульельми А.В., Потапов А.С. Распространение магнитогидродинамических и циклотронных волн в параболическом волноводе // Исслед. по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — 1985. — Вып. 73. — С. 172–177.
- Гульельми А.В., Троицкая В.А. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. — М. : Наука, 1973.

- Гульельми А.В., Фейгин Ф.З. Воздействие пондеромоторных сил на магнитосферу Земли. Физика Земли. — 2018. — № 5. — С. 53–60.
- Гульельми А.В., Потапов А.С., Клайн Б.С. Комбинированная неустойчивость Рэлея–Тейлора–Кельвина–Гельмгольца на магнитопаузе // Солнечно-земная физика. — 2010. — Т. 15(128). — С. 24–27.
- Дмитриенко И.С., Леонович А.С., Мазур В.А. и др. МГД-волноводы в околоземной плазме // Исслед. по геомагнетизму, аэрномии и физике Солнца. — 1986. — Вып. 76. — С. 145–164.
- Докучаев В.Л. Черенковское излучение альфвеновских волн // ЖЭТФ. — 1968. — Т. 53. — С. 723–731.
- Золотухина Н.А. О возбуждении альвеновских волн в магнитосфере движущимся источником // Исслед. по геомагнетизму, аэрномии и физике Солнца. — 1974. — Вып. 34. — С. 20–23.
- Золотухина Н.А., Харченко И.П. Расположение магнитосферных источников геомагнитных пульсаций типа Ps<sub>6</sub>: результаты статистического исследования // Исслед. по геомагнетизму, аэрномии и физике Солнца. — 1995. — Вып. 103. — С. 17–26.
- Кадомцев Б.Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы (выпуск 2) / Под ред. М.А. Леонтович. — Атомиздат, 1963. — С. 132–175.
- Кадомцев Б.Б., Погуце О.П. Неустойчивость плазмы на запертых частицах в тороидальной геометрии // ЖЭТФ. — 1966. — Т. 51(6). — С. 1734–1746.
- Каладзе Т.Д., Михайловский А.Б., Потапов А.С. и др. Неустойчивость магнитозвуковых волн на запертых в геомагнитном поле протонах // Исслед. по геомагнетизму, аэрномии и физике Солнца. — 1976. — Вып. 39. — С. 21–26.
- Кирпичев И.П., Антонова Е. Е. Распределение давления плазмы в экваториальной плоскости магнитосферы земли на геоцентрических расстояниях от 6 до 10 R<sub>E</sub>

- по данным международного проекта THEMIS // Геомагнетизм и аэрономия. — 2011. — Т. 51. — С. 456–461.
- Клейменова Н.Г., Афанасьева Л.Т., Козырева О.В. и др. Гигантские пульсации  $P_g$  на широтном профиле обсерваторий // Геомагнетизм и аэрономия. — 1990. — Т. 30. — С. 579–583.
- Клименко В.А., Мишин В.В. Волны альвеновского типа в потоках неоднородной плазмы и их связь с геомагнитными пульсациями // Исслед. по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — 1980. — Вып. 50. — С. 153–163.
- Климускин Д.Ю. Метод описания альфвеновской и магнитозвуковой ветвей колебаний неоднородной плазмы // Физика плазмы. — 1994. — Т. 20. — С. 309–315.
- Климускин Д.Ю. Пространственная структура азимутально-мелкомасштабных гидромагнитных волн в аксиально-симметричной магнитосфере с конечным давлением плазмы // Физика плазмы. — 1997. — Т. 23. — С. 931–944.
- Ковнер М.С. О неустойчивости низкочастотных электромагнитных волн в плазме, пронизываемой потоком заряженных частиц (распространение под произвольным углом к направлению магнитного поля) // Известия ВУЗов, сер. Радиофизика. — 1961. — Т. 17. — С. 444–454.
- Ковнер М.С., Мишин В.В., Шкелев Е.И. О гидромагнитных пульсациях в магнитосфере и неустойчивости Кельвина-Гельмгольца // Геомагнетизм и аэрономия. — 1977. — Т. 17. — С. 714–718.
- Ковтюх А.С. Резонанс ионов кольцевого тока с дрейфовыми волнами // Космические исследования. — 1998. — Т. 36. — С. 142–155.
- Кораблев Л.В., Рудаков Л.И. О неустойчивости плазмы с изотропной функцией распределения // ЖЭТФ. — 1968. — Т. 54. — С. 818–821.
- Костарев Д.В., Магер П.Н. Дрейфово-компрессионные волны, распространяющиеся в направлении дрейфа энергичных электронов в магнитосфере // Солнечно-земная физика. — 2017. — Т. 3. — С. 20–29.

- Кропоткин А.П. Ускорения электронов внешнего радиационного пояса локальными электрическими полями // Геомагнетизм и аэрономия. — 2021. — Т. 61, № 4. — С. 411–417.
- Крылов А.И., Лифшиц А.Е., Федоров Е.Н. О резонансных свойствах магнитосферы // Известия АН СССР, сер. Физика Земли. — 1981. — Т. 8. — С. 49–58.
- Леонович А.С., Мазур В.А. Динамика мелкомасштабных альфвеновских волн в магнитосферном резонаторе // Физика плазмы. — 1987. — Т. 13. — С. 800–810.
- Леонович А.С., Мазур В.А. Альфвеновский резонанс в аксиально-симметричной магнитосфере // Физика плазмы. — 1989. — Т. 15. — С. 660–673.
- Леонович А.С., Мазур В.А. Собственные сверхнизкочастотные колебания ближнего плазменного слоя // Космические исследования. — 2008. — Т. 46. — С. 336–343.
- Леонович А.С., Мазур В.А. Линейная теория МГД-колебаний в магнитосфере. — Москва : Физматлит, 2016.
- Леонович А.С., Мазур В.А., Сенаторов В.Н. Альфвеновский волновод // ЖЭТФ. — 1983а. — Т. 85, № 1(7). — С. 141–145.
- Леонович А.С., Мазур В.А., Сенаторов В.Н. Дисперсионные эффекты МГД-волн в неоднородной плазме // Исслед. по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — 1983б. — Вып. 66. — С. 3–17.
- Леонович А.С., Мишин В.В. Поток энергии магнитозвуковых волн из солнечного ветра в магнитосферу // Геомагнетизм и аэрономия. — 1999. — Т. 39. — С. 52–58.
- Лифшиц А.Е., Федоров Е.Н. Гидромагнитные колебания магнитосферного резонатора // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287. — С. 90–94.
- Ляцкий В.Б., Мальцев Ю.П. Магнитосферно-ионосферное взаимодействие. — М. : Наука, 1983.
- Мазур В.А. Резонансное возбуждение магнитосферы гидромагнитными волнами, падающими из солнечного ветра // Физика плазмы. — 2010. — Т. 36. — С. 1013–1023.

- Мазур В.А., Чуйко Д.А. Возбуждение магнитосферного МГД-резонатора неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца // Физика плазмы. — 2011. — Т. 37. — С. 979–1000.
- Мазур Н.Г., Федоров Е.Н., Пилипенко В.А. О возможности отражения альфвеновских волн в криволинейном магнитном поле // Физика плазмы. — 2004. — Т. 30. — С. 450–458.
- Мазур Н.Г., Федоров Е.Н., Пилипенко В.А. Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме // Геомагнетизм и аэрномия. — 2012. — Т. 52. — С. 639–648.
- Михайловский А.Б., Похотелов О.А. Новый механизм генерации геомагнитных пульсаций быстрыми частицами // Физика плазмы. — 1975. — Т. 37. — С. 786–792.
- Михайловский А.Б., Фридман А.М. Дрейфовые волны в плазме конечного давления // ЖЭТФ. — 1966. — Т. 51. — С. 1430.
- Михайловский А.Б., Фридман А.М. Резонансное взаимодействие с частицами волн альфвеновского типа в неоднородной плазме конечного давления // ЖТФ. — 1967. — Т. 37. — С. 1782.
- Мишин В.В., Матюхин Ю.Г. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца на магнитопаузе как возможный источник волновой энергии в магнитосфере Земли // Геомагнетизм и аэрномия. — 1986. — Т. 26. — С. 952–957.
- Мишин В.В., Клибанова Ю.Ю., Цэгмед Б. Влияние наклона фронта неоднородности солнечного ветра на свойства вызванных им длиннопериодических геомагнитных пульсаций // Космич. исслед. — 2013. — Т. 51. — С. 107–118.
- Моисеев А.В., Стародубцев С.А., Мишин В.В. Особенности возбуждения и распространения по азимуту и меридиану длиннопериодных  $P_3$  колебаний геомагнитного поля 8 декабря 2017 г. // Солнечно-земная физика. — 2020. — Т. 6. — С. 57–72.
- Нортроп Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц. — М. : Атомиздат, 1967.

- Потапов А.С. Возбуждение геомагнитных пульсаций типа Pc3 перед фронтом околоземной ударной волны пучком отраженных протонов // Исслед. по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. — 1974. — Вып. 34. — С. 3–12.
- Потапов А.С., Похотелов О.А. Взаимодействие моды на запертых ионах с быстрыми протонами в магнитосфере // Исслед. по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. — 1976. — Вып. 39. — С. 12–20.
- Потапов А.С., Цэгмэд Б., Рыжакова Л.В. Связь потоков релятивистских электронов на геостационарной орбите с уровнем УНЧ активности на поверхности Земли и в солнечном ветре в 23-м цикле солнечной активности // Космические исследования. — 2012. — Т. 50. — С. 130–146.
- Похотелов О.А., Пилипенко В.А. К теории дрейфово-зеркальной неустойчивости магнитосферной плазмы // Геомагнетизм и аэронаука. — 1976. — Т. 16. — С. 504–510.
- Рудаков Л.И., Сагдеев Р.З. О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М.А. Леонтовича. — Т. 3. — М. : Изд-во АН СССР, 1958. — С. 268–277.
- Сафаргалеев В.В., Мальцев Ю.П. Внутренние «гравитационные» волны в плазменном слое // Геомагн. аэронаука. — 1986. — Т. 26. — С. 270–274.
- Сафаргалеев В.В., Мальцев Ю.П. Генерация предварительного импульса и долгопериодных пульсаций во время SI // Геомагн. аэронаука. — 1987. — Т. 27. — С. 247–252.
- Степанов К.Н., Киценко А.Б. О возбуждении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме пучком заряженных частиц // Журн. техн. физики. — 1961. — Т. 31. — С. 167–175.

- Федоров Е.Н., Мазур Н.Г., Пилипенко В.А. К теории альвеновского резонанса в двумерно-неоднородной плазме // *Физика плазмы*. — 1995. — Т. 21, № 4. — С. 333–338.
- Черемных О.К., Данилова В.В. Поперечно-мелкомасштабные МГД возмущения в космической плазме с магнитными поверхностями // *Кинематика и физика небесных тел*. — 2011. — Т. 27, № 2. — С. 63–79.
- Черемных О.К., Климушкин Д.Ю., Костарев Д.В. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с непрерывным спектром // *Кинематика и физика небесных тел*. — 2014. — Т. 30, № 5. — С. 3–21.
- Чурилов С.М. Альфвеновский волновод на диссипации // *ЖЭТФ*. — 2002. — Т. 121, № 6. — С. 1285–1287.
- Черемных О.К., Климушкин Д.Ю., Магер П.Н. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с дискретным спектром // *Кинематика и физика небесных тел*. — 2016. — Т. 32, № 3. — С. 26–39.
- Шевырев Н.Н. Волны зеркальной моды в магнитослое Земли по наблюдениям на спутнике «Интербол-1» // *Космические исследования*. — 2005. — Т. 43, № 4. — С. 306–313.
- Agapitov A. V., Cheremnykh O. K. Magnetospheric ULF waves driven by external sources // *Advances in Astronomy and Space Physics*. — 2013. — Vol. 3, no. 1. — P. 12–19.
- Agapitov A. V., Cheremnykh O. K., Parnowski A. S. Ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth: Spectrum, stability and eigenmode analysis // *Adv. Space Res.* — 2008. — Vol. 41. — P. 1682–1687.
- Agapitov O., Glassmeier K.-H., Plaschke F. et al. Surface waves and field line resonances: A THEMIS case study // *J. Geophys. Res.* — 2009. — Vol. 114. — P. A00C27.

- Allan W., Poulter E. M., Nielsen E. STARE observations of a Pc5 pulsation with large azimuthal wave number // *J. Geophys. Res.* — 1982. — Vol. 87. — P. 6163–6172.
- Allan W., Poulter E. M., Nielsen E. Pc5 pulsations associated with ring current proton drifts: STARE radar observations // *Planet. Space Sci.* — 1983. — Vol. 31. — P. 1279–1289.
- Allan W., White S. P., Poulter E. M. Impulse-excited hydromagnetic cavity and field-line resonances in the magnetosphere // *Planet. Space Sci.* — 1986. — Vol. 34. — P. 371–385.
- Alperovich L.S., Fedorov E.N. *Hydromagnetic Waves in the Magnetosphere and the Ionosphere.* — Springer, 2007.
- Anderson B.J., Engebretson M.J., Rounds S.P. et al. A statistical study of Pc3–5 pulsations observed by the AMPTE/CCE magnetic fields experiment. 1. Occurrence distributions // *J. Geophys. Res.* — 1990. — Vol. 95. — P. 10495–10523.
- Anderson B. J. Statistical studies of Pc3–5 pulsations and their relevance for possible source mechanisms of ULF waves // *Ann. Geophys.* — 1993. — Vol. 11. — P. 128–143.
- Andrushchenko Zh.N., Bojko A.Ya., Cheremnykh O.K. Interaction of trapped superthermal particles with ballooning flute modes in a tokamak with circular magnetic surfaces // *Nucl. Fusion.* — 1990. — Vol. 30. — P. 2097–2110.
- Antonova A., Gubar' Y., Kropotkin A. A model of spatio-temporal structure of the substorm electromagnetic disturbance and its consequences // *Physics and Chemistry of the Earth C.* — 2000. — Vol. 25. — P. 43–46.
- Antonova E. E., Kirpichev I. P., Stepanova M. V. Plasma pressure distribution in the surrounding the Earth plasma ring and its role in the magnetospheric dynamics // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* — 2014. — Vol. 115. — P. 32–40.
- Antonova E. E., Kirpichev I. P., Vovchenko V. V. et al. Characteristics of plasma ring, surrounding the Earth at geocentric distances  $\sim 7 - 10$  RE and magnetospheric

- current systems // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2013. — Vol. 99. — P. 85–91.
- Antonova E. E., Kornilov I. A., Kornilova T. A. et al. Features of auroral breakup obtained using data of ground-based television observations: case study // *Annales Geophysicae*. — 2009. — Vol. 27, no. 4. — P. 1413–1422.
- Antonova E. E., Stepanova M., Kirpichev I. P. et al. Structure of magnetospheric current systems and mapping of high latitude magnetospheric regions to the ionosphere // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2018. — Vol. 177. — P. 103–114.
- Antonsen Jr. T. M., Lane B. Kinetic equations for low frequency instabilities in inhomogeneous plasmas // *Physics of Fluids*. — 1980. — Vol. 23. — P. 1205–1214.
- Atkinson G., Watanabe T. Surface waves on the magnetospheric boundary as a possible origin of long period geomagnetic micropulsations // *Earth and Planetary Science Letters*. — 1966. — Vol. 1. — P. 89–91.
- Baddeley L.J., Yeoman T.K., Wright D.M. et al. Morning sector drift-bounce resonance driven ULF waves observed in artificially-induced HF radar backscatter // *Ann. Geophys.* — 2002. — Vol. 20. — P. 1487–1498.
- Baddeley L.J., Yeoman T.K., Wright D.M. et al. Statistical study of unstable particle populations in the global ring current and their relation to the generation of high  $m$  ULF waves // *Ann. Geophys.* — 2004. — Vol. 22. — P. 4229–4241.
- Baddeley L.J., Yeoman T.K., Wright D.M. et al. On the coupling between unstable magnetospheric particle populations and resonant high  $m$  ULF wave signatures in the ionosphere // *Ann. Geophys.* — 2005a. — Vol. 23. — P. 567–577.
- Baddeley L. J., Yeoman T. K., Wright D. M. HF Doppler sounder measurements of the ionospheric signatures of small scale ULF waves // *Ann. Geophys.* — 2005b. — Vol. 23. — P. 1807–1820.

- Barfield J. N., McPherron R. L. Statistical characteristics of storm-associated Pc 5 micropulsations observed at the synchronous equatorial orbit // *J. Geophys. Res.* — 1972. — Vol. 77. — P. 4720–4733.
- Boardsen S.A., Slavin J.A., Anderson B.J. et al. Survey of coherent  $\sim 1$  Hz waves in Mercury's inner magnetosphere from MESSENGER observations // *J. Geophys. Res.* — 2012. — Vol. 117. — P. A00M05.
- Bogachev S. A., Somov B. V., Kosugi T. et al. The Motions of the Hard X-Ray Sources in Solar Flares: Images and Statistics // *Astrophys. J.* — 2005. — Vol. 630. — P. 561–572.
- Brady C., Arber T. Damping of vertical coronal loop kink oscillations through wave tunneling // *Astron. Astrophys.* — 2005. — Vol. 438(2). — P. 733–740.
- Buchsbaum S.J. Resonance in a plasma with two ion species // *Phys. Fluids.* — 1960. — Vol. 3. — P. 418–420.
- Catto P. J., Tang W. M., Baldwin D. E. Generalized gyrokinetics // *Plasma Physics.* — 1981. — Vol. 23. — P. 639–650.
- Chandrasekhar S., Kaufman A. N., Watson K. M. The Stability of the Pinch // *Proceedings of the Royal Society of London Series A.* — 1958. — Vol. 245, no. 1243. — P. 435–455.
- Chelpanov M.A., Mager P.N., Klimushkin D.Yu. et al. Experimental evidence of drift compressional waves in the magnetosphere: An Ekaterinburg coherent decameter radar case study // *J. Geophys. Res.* — 2016. — Vol. 121, no. 2. — P. 1315–1326. — 2015JA022155.
- Chen L., Cowley S. C. On field line resonances of hydromagnetic Alfvén waves in dipole magnetic field // *Geophys. Res. Lett.* — 1989. — Vol. 16. — P. 895–897.
- Chen L., Hasegawa A. A theory of long period magnetic pulsation. 1. Steady state excitation of a field line resonance // *J. Geophys. Res.* — 1974. — Vol. 79. — P. 1024–1032.

- Chen L., Hasegawa A. Kinetic theory of geomagnetic pulsations, 1, Internal excitations by energetic particles // *J. Geophys. Res.* — 1991. — Vol. 96. — P. 1503–1512.
- Cheng C.Z., Chang T.C., Lin C.A. et al. Magnetohydrodynamic theory of field line resonances in the magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1993. — Vol. 98, no. A7. — P. 11339–11347.
- Cheng C. Z., Lui A. T. Y. Kinetic ballooning instability for substorm onset and current disruption observed by AMPTE/CCE // *Geophys. Res. Lett.* — 1998. — Vol. 25. — P. 4091–4094.
- Chi P. J., Le G. Observations of magnetospheric high- $m$  poloidal waves by ST-5 satellites in low Earth orbit during geomagnetically quiet times // *J. Geophys. Res.* — 2015. — Vol. 120, no. 6. — P. 4776–4783. — 2015JA021145.
- Chi P. J., Lee D.-H., Russell C. T. Tamao travel time of sudden impulses and its relationship to ionospheric convection vortices // *J. Geophys. Res.* — 2006. — Vol. 111. — P. 1033–1037.
- Chisham G. Giant pulsations: An explanation for their rarity and occurrence during geomagnetically quiet times // *J. Geophys. Res.* — 1996. — Vol. 101. — P. 24755–24763.
- Chisham G., Mann I. R., Orr D. A statistical study of giant pulsation latitudinal polarization and amplitude variation // *J. Geophys. Res.* — 1997. — Vol. 102. — P. 9619–9630.
- Chisham G., Orr D., Yeoman T. K. Observations of a giant pulsation across an extended array of ground magnetometers and on auroral radar // *Planet. Space Sci.* — 1992. — Vol. 40. — P. 953–964.
- Cooper M.B., Gerrard A.J., Lanzerotti L.J. et al. Mirror Instabilities in the Inner Magnetosphere and Their Potential for Localized ULF Wave Generation // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 2021. — Vol. 126, no. 2. — P. e2020JA028773.

- Crabtree C., Chen L. Finite gyroradius theory of drift compressional modes // *Geophys. Res. Lett.* — 2004. — Vol. 31. — P. L17804.
- Crabtree C., Horton W., Wong H.V. et al. Bounce-averaged stability of compressional modes in geotail flux tubes // *J. Geophys. Res.* — 2003. — Vol. 108. — P. 1084.
- Cramm R., Glassmeier K.H., Othmer C. et al. A case study of a radially polarized Pc4 event observed by the Equator-S satellite // *Annales Geophysicae.* — 2000. — Vol. 18, no. 4. — P. 411–415.
- Dai L., Takahashi K., Lysak R. et al. Storm time occurrence and spatial distribution of Pc4 poloidal ULF waves in the inner magnetosphere: A Van Allen Probes statistical study // *J. Geophys. Res.* — 2015. — Vol. 120, no. 6. — P. 4748–4762.
- Dai L., Takahashi K., Wygant J.R. et al. Excitation of poloidal standing Alfvén waves through drift resonance wave-particle interaction // *Geophys. Res. Lett.* — 2013. — Vol. 40, no. 16. — P. 4127–4132.
- De Michelis P., Daglis I.A., Consolini G. Average terrestrial ring current derived from AMPTE/CCE-CHEM measurements // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 1997. — Vol. 102, no. A7. — P. 14103–14111.
- De Moortel I. Longitudinal Waves in Coronal Loops // *Space Sci. Rev.* — 2009. — Vol. 149. — P. 65–81.
- Denton R. E. ULF waves in the magnetosheath // *International Journal of Geomagnetism and Aeronomy.* — 2000. — Vol. 2, no. 1. — P. 45–55.
- Denton R. E., Lessard M. R., Kistler L. M. Radial localization of magnetospheric guided poloidal Pc4-5 waves // *J. Geophys. Res.* — 2003. — Vol. 108(A3). — P. 1105.
- Denton R. E., Takahashi K., Galkin I. A. et al. Distribution of density along magnetospheric field lines // *Journal of Geophysical Research.* — 2006. — Vol. 111. — P. A04213.
- Dmitrienko I. S., Mazur V. A. On waveguide propagation of Alfvén waves at the plasmapause // *Planet. Space Sci.* — 1985. — Vol. 33. — P. 471–477.

- Dmitrienko I. S., Mazur V. A. The spatial structure of quasicircular Alfvén modes of waveguide at the plasmopause — Interpretation of Pc1 pulsations // *Planet. Space Sci.* — 1992. — Vol. 40. — P. 139–148.
- Du J., Zhang T.L., Nakamura R. et al. Mode conversion between Alfvén and slow waves observed in the magnetotail by THEMIS // *Geophys. Res. Lett.* — 2011. — Vol. 38.
- Dungey J. W. Electrodynamics of the outer atmospheres // *Ionospheric Science Report.* — No. 69. — Ions. Res. Lab., Pennsylvania State Univ, 1954. — P. 1–52.
- Dungey J. W. Effects of electromagnetic perturbations on particles trapped in the radiation belts // *Space Science Reviews.* — 1964. — Vol. 4. — P. 199–222.
- Elkington S. R. *A Review of ULF Interactions With Radiation Belt Electrons* // *Magnetospheric ULF Waves: Synthesis and New Directions* / Ed. by K. Takahashi, P. J. Chi, R. E. Denton, R. L. Lysak. — Vol. 169 of Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series. — 2006. — P. 177–193.
- Engebretson M.J., Murr D.L., Erickson K.N. et al. The spatial extent of radial magnetic pulsation events observed in the dayside near synchronous orbit // *J. Geophys. Res.* — 1992. — Vol. 97. — P. 13741–13758.
- Erkaev N.V., Semenov V.S., Biernat H.K. Magnetic Double-Gradient Instability and Flapping Waves in a Current Sheet // *Physical Review Letters.* — 2007. — Vol. 99, no. 23. — P. 235003.
- Erkaev N., Semenov V., Kubyshev I. et al. MHD model of the flapping motions in the magnetotail current sheet // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 2009. — Vol. 114, no. A3.
- Faganello M., Califano F. Magnetized Kelvin-Helmholtz instability: theory and simulations in the Earth's magnetosphere context // *Journal of Plasma Physics.* — 2017. — Vol. 83, no. 6. — P. 535830601.

- Fedorov E., Mazur N., Pilipenko V. et al. MHD wave conversion in plasma waveguides // *J. Geophys. Res.* — 1998. — Vol. 103. — P. 26595–26605.
- Fenrich F.R., Samson J.C. Growth and decay of field line resonances // *J. Geophys. Res.* — 1997. — Vol. 102. — P. 20,031–20,039.
- Fenrich F.R., Samson J.C., Sofko G. et al. ULF high- and low- $m$  field line resonances observed with the Super Dual Auroral Radar Network // *J. Geophys. Res.* — 1995. — Vol. 100. — P. 21535–21548.
- Frieman E., Rotenberg M. On Hydromagnetic Stability of Stationary Equilibria // *Reviews of Modern Physics.* — 1960. — Vol. 32. — P. 898–902.
- Glassmeier K.-H. Magnetometer array observations of a giant pulsation in the magnetosphere // *J. Geophys.* — 1980. — Vol. 48. — P. 138–147.
- Glassmeier K.-H. Traveling magnetospheric convection twin-vortices — Observations and theory // *Ann. Geophys.* — 1992. — Vol. 10. — P. 547–565.
- Glassmeier K.-H. ULF pulsations // *Handbook of Atmospheric Electrodynamics*, Vol. II. — 1995. — P. 463–502.
- Glassmeier K.-H., Buchert S., Motschmann U. et al. Concerning the generation of geomagnetic giant pulsations by drift-bounce resonance ring current instabilities // *Ann. Geophys.* — 1999. — Vol. 17. — P. 338–350.
- Glassmeier K.-H., Espley J. *ULF Waves in Planetary Magnetospheres* // *Magnetospheric ULF Waves: Synthesis and New Directions.* — American Geophysical Union, 2006. — P. 341–359. — ISBN: 9781118666319.
- Glassmeier K.-H., Heppner C. Traveling magnetospheric convection twin vortices — Another case study, global characteristics, and a model // *Journal of Geophysical Research.* — 1992. — Vol. 97. — P. 3977–3992.
- Glassmeier K.-H., Klimushkin D.Yu., Othmer C. et al. ULF waves at Mercury: Earth, the giants, and their little brother compared // *Adv. Space Res.* — 2004. — Vol. 33. — P. 1875–1883.

- Glassmeier K.-H., Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Concerning ULF pulsations in Mercury's magnetosphere // *Geophys. Res. Lett.* — 2003. — Vol. 30, no. 18.
- Golovchanskaya I. V., Kornilov I. A., Kornilova T. A. East-west type precursor activity prior to the auroral onset: Ground-based and THEMIS observations // *J. Geophys. Res.* — 2015. — Vol. 120. — P. 1109–1123.
- Golovchanskaya I. V., Kullen A. Ballooning-type instabilities and waves in the Earth's magnetosphere (review) // *Physics of Auroral Phenomena, Proc. XXVIII Annual Seminar, Apatity.* — Kola Science Centre, Russian Academy of Science, 2005. — P. 93–99.
- Green C. A. Observations of Pg pulsations in the Northern Auroral Zone and at lower latitude conjugate regions // *Planet. Space Sci.* — 1979. — Vol. 27. — P. 63–77.
- Guglielmi A., Lundin R. Ponderomotive upward acceleration of ions by ion cyclotron and Alfvén waves over the polar regions // *J. Geophys. Res.* — 2001. — Vol. 106. — P. 13219–13236.
- Hagege K., Laval G., Pellat R. Interaction between high-frequency turbulence and magnetospheric micropulsations // *J. Geophys. Res.* — 1973. — Vol. 78. — P. 3806–3815.
- Hameiri E., Laurence P., Mond M. The ballooning instability in space plasmas // *J. Geophys. Res.* — 1991. — Vol. 96. — P. 1513–1526.
- Hasegawa A. Drift mirror instability of the magnetosphere // *Phys. Fluids.* — 1969. — Vol. 12. — P. 2642–2650.
- Hasegawa A. Particle acceleration by MHD surface wave and formation of aurora // *J. Geophys. Res.* — 1976. — Vol. 81. — P. 5083–5090.
- Hasegawa Akira, Chen Lui. Kinetic process of plasma heating due to Alfvén wave excitation // *Physical Review Letters.* — 1975. — Vol. 35, no. 6. — P. 370–373.
- Hellinger P., Landi S., Matteini L. et al. Mirror Instability in the Turbulent Solar Wind // *Astrophys. J.* — 2017. — Vol. 838, no. 2. — P. 158.

- Hiraki Y., Watanabe T. Feedback instability analysis for dipole configuration with ionospheric and magnetospheric cavities // *J. Geophys. Res.* — 2011. — Vol. 116, no. A11. — A11220.
- Hood A. W. Ballooning instabilities in the solar corona — Conditions for stability // *Solar. Phys.* — 1986. — Vol. 103. — P. 329–345.
- Huba J. D., Drake J. F. Physical mechanism of wave-particle resonances in an inhomogeneous magnetic field. I - Linear theory // *Phys. Fluids.* — 1981. — Vol. 24. — P. 1650–1654.
- Huba J. D., Drake J. F. Physical mechanism of wave-particle resonances in a curved magnetic field // *Phys. Fluids.* — 1982. — Vol. 25. — P. 1207–1210.
- Hughes W.J., McPherron R.L., Barfield J.N. et al. A compressional Pc4 pulsation observed by three satellites in geostationary orbit near local midnight // *Planet. Space Sci.* — 1979. — Vol. 27. — P. 821–840.
- Hughes W.J., Southwood D.J. An illustration of modification of geomagnetic pulsation structure by the ionosphere // *J. Geophys. Res.* — 1976. — Vol. 81. — P. 3241–3247.
- Hughes W.J., Southwood D.J. The screening of micropulsation signals by the atmosphere and ionosphere // *J. Geophys. Res.* — 1976. — Vol. 81. — P. 3234–3240.
- Hughes W.J., Southwood D.J., Mauk B. et al. Alfvén waves generated by an inverted plasma energy distribution // *Nature.* — 1978. — Vol. 275. — P. 43–45.
- Hughes W. J., McPherron R. L., Russell C. T. Multiple satellite observations of pulsation resonance structure in the magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1977. — Vol. 82. — P. 492–498.
- Inhester B. Numerical modeling of hydromagnetic wave coupling in the magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1987. — Vol. 92. — P. 4751–4756.
- Itonaga M., Yoshikawa A., Fujita S. A wave equation describing the generation of field-aligned current in the magnetosphere // *Earth, Planets, and Space.* — 2000. — Vol. 52. — P. 503–507.

- Jacobs J. A., Kato Y., Matsushita S. et al. Classification of Geomagnetic Micropulsations // *J. Geophys. Res.* — 1964. — Vol. 69. — P. 180–181.
- James M. K., Yeoman T. K., Mager P. N. et al. The spatio-temporal characteristics of ULF waves driven by substorm injected particles // *J. Geophys. Res.* — 2013. — Vol. 118. — P. 1737–1749.
- James M.K., Imber S.M., Yeoman T.K. et al. Field Line Resonance in the Hermean Magnetosphere: Structure and Implications for Plasma Distribution // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2019. — Vol. 124, no. 1. — P. 211–228.
- Kaneko T., Goossens M., Soler R. et al. Apparent Cross-field Superslow Propagation of Magnetohydrodynamic Waves in Solar Plasmas // *Astrophys. J.* — 2015. — Vol. 812. — P. 121.
- Kangas J., Guglielmi A., Pokhotelov O. Morphology and physics of short-periodic magnetic pulsations // *Space Sci. Rev.* — 1998. — Vol. 93. — P. 435–512.
- Karpman V.I., Meerson B.I., Mikhailovsky A.B. et al. The effects of bounce resonances on wave growth rates in the magnetosphere // *Planet. Space. Sci.* — 1977. — Vol. 25. — P. 573–585.
- Keiling A. Pi2 pulsations driven by ballooning instability // *J. Geophys. Res.* — 2012. — Vol. 117. — P. A03228.
- Keiling A. The Dynamics of the Alfvénic Oval // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. — 2021. — Vol. 219. — P. 105616.
- Keiling A., Takahashi K. Review of Pi2 Models // *Space Sci. Rev.* — 2011. — Vol. 161. — P. 63–148.
- Kim E.-H., Johnson J.R., Valeo E. et al. Global modeling of ULF waves at Mercury // *Geophys. Res. Lett.* — 2015. — Vol. 42. — P. 5147–5154.
- Kim S., Nakariakov V. M., Cho K.-S. Vertical Kink Oscillation of a Magnetic Flux Rope Structure in the Solar Corona // *Astrophys. J. Letters*. — 2014. — Vol. 797. — P. L22.

- Kivelson M. G., Southwood D. J. Resonant ULF waves — A new interpretation // *Geophys. Res. Lett.* — 1985. — Vol. 12. — P. 49–52.
- Kivelson M. G., Southwood D. J. Ionospheric traveling vortex generation by solar wind buffeting of the magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1991. — Feb. — Vol. 96. — P. 1661–1667.
- Klimushkin D. Yu. Resonators for hydromagnetic waves in the magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1998a. — Vol. 103. — P. 2369–2375.
- Klimushkin D. Yu. Theory of azimuthally small-scale hydromagnetic waves in the axisymmetric magnetosphere with finite plasma pressure // *Ann. Geophys.* — 1998b. — Vol. 16. — P. 303–321.
- Klimushkin D. Yu, Mager P. N. The structure of low-frequency standing Alfvén waves in the box model of the magnetosphere with magnetic field shear // *Journal of Plasma Physics.* — 2004. — Vol. 70. — P. 379–395.
- Klimushkin D. Yu, Mager P. N., Glassmeier K.-H. Toroidal and poloidal Alfvén waves with arbitrary azimuthal wave numbers in a finite pressure plasma in the Earth’s magnetosphere // *Ann. Geophys.* — 2004. — Vol. 22. — P. 267–288.
- Korotova G. I., Sibeck D. G. Multipoint observations of compressional Pc5-6 pulsations in the dawn side magnetosphere: A case study // *Advances in Space Research.* — 2024. — Vol. 73. — P. 597–606.
- Korovinskiy D.B., Divin A.V., Semenov V.S. et al. The transition from “double-gradient” to ballooning unstable mode in bent magnetotail-like current sheet // *Physics of Plasmas.* — 2019. — Vol. 26, no. 10. — P. 102901.
- Kozlov D.A., Mazur N.G., Pilipenko V.A. et al. Dispersion equation for ballooning modes in two-component plasma // *J. Plasma Physics.* — 2014. — Vol. 80. — P. 379–393.

- Lanzerotti L. J., Hasegawa A., MacLennan C.G. Drift mirror instability in the magnetosphere: Particle and field oscillations and electron heating // *Journal of Geophysical Research*. — 1969. — Vol. 74, no. 24. — P. 5565–5578.
- Leonovich A. S. Wave mechanism of the magnetospheric convection // *Planet. Space Sci.* — 2012. — Vol. 65, no. 1. — P. 67–75.
- Leonovich A. S., Klimushkin D. Yu, Mager P. N. Experimental evidence for the existence of monochromatic transverse small-scale standing Alfvén waves with spatially dependent polarization // *J. Geophys. Res.* — 2015. — Vol. 120. — P. 5443–5454.
- Leonovich A. S., Kozlov D. A. On ballooning instability in current sheets // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2013. — Vol. 55, no. 8. — P. 085013.
- Leonovich A. S., Kozlov D. A., Pilipenko V. A. Magnetosonic resonance in a dipole-like magnetosphere // *Ann. Geophys.* — 2006. — Vol. 24. — P. 2277–2289.
- Leonovich A. S., Mazur V. A. The spatial structure of poloidal Alfvén oscillations of an axisymmetric magnetosphere // *Planet. Space Sci.* — 1990. — Vol. 38. — P. 1231–1241.
- Leonovich A. S., Mazur V. A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere // *Planet. Space Sci.* — 1993. — Vol. 41. — P. 697–717.
- Leonovich A. S., Mazur V. A. Linear transformation of the standing Alfvén wave in an axisymmetric magnetosphere // *Planet. Space Sci.* — 1995a. — Vol. 43. — P. 885–893.
- Leonovich A. S., Mazur V. A. Magnetospheric resonator for transverse-small-scale standing Alfvén waves // *Planet. Space Sci.* — 1995b. — Vol. 43. — P. 881–883.
- Leonovich A. S., Mazur V. A. Penetration to the Earth's surface of standing Alfvén waves excited by external currents in the ionosphere // *Ann. Geophys.* — 1996. — Vol. 14. — P. 545–556.
- Leonovich A. S., Mazur V. A. A model equation for monochromatic standing Alfvén waves in the axially-symmetric magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1997. — Vol. 102. — P. 11443–11456.

- Leonovich A. S., Mazur V. A. Standing Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere excited by a non-stationary source // *Ann. Geophys.* — 1998. — Vol. 16. — P. 914–920.
- Leonovich A. S., Mazur V. A. Standing Alfvén waves in the magnetosphere from a localized monochromatic source // *J. Geophys. Res.* — 1999. — Vol. 104. — P. 2411–2420.
- Leonovich A. S., Mishin V. V., Cao J. B. Penetration of magnetosonic waves into the magnetosphere: influence of a transition layer // *Annales Geophysicae.* — 2003. — Vol. 21. — P. 1083–1093.
- Lin C. S., Parks G. K. The coupling of Alfvén and compressional waves // *J. Geophys. Res.* — 1978. — Vol. 83. — P. 2628–2636.
- Liu C.S. Low-frequency drift instabilities of the ring current belt // *J. Geophys. Res.* — 1970. — Vol. 75. — P. 3789–3801.
- Liu W., Cao J.B., Li X. et al. Poloidal ULF wave observed in the plasmasphere boundary layer // *J. Geophys. Res.* — 2013. — Vol. 118, no. 7. — P. 4298–4307.
- Liu W.W., Liang J., Donovan E.F. et al. If substorm onset triggers tail reconnection, what triggers substorm onset? // *J. Geophys. Res.* — 2012. — Vol. 117. — P. A11220.
- Liu W., Sarris T.E., Li X. et al. Spatial structure and temporal evolution of a dayside poloidal ULF wave event // *Geophys. Res. Lett.* — 2011. — Vol. 38, no. 19.
- Liu W. W. Physics of the explosive growth phase: Ballooning instability revisited // *J. Geophys. Res.* — 1997. — Vol. 102, no. A3. — P. 4927–4931.
- Lui A. T. Y., Hamilton D. C. Radial profiles of quiet time magnetospheric parameters // *J. Geophys. Res.* — 1992. — Vol. 97, no. A12. — P. 19325–19332.
- Lui A. T. Y., McEntire R. W., Krimigis S. M. Evolution of the ring current during two geomagnetic storms // *J. Geophys. Res.* — 1987. — Vol. 92, no. A7. — P. 7459–7470.

- Lysak R.L., Lotko W. On the kinetic dispersion relation for shear Alfvén waves // *J. Geophys. Res.* — 1996. — Vol. 101. — P. 5085–5094.
- Mager O. V. Alfvén Waves Generated Through the Drift-Bounce Resonant Instability in the Ring Current: A THEMIS Multi-Spacecraft Case Study // *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*. — 2021. — Vol. 126, no. 11. — P. e29241.
- Mager P.N., Klimushkin D. Yu., Pilipenko V. A. et al. Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma // *Ann. Geophys.* — 2009. — Vol. 27, no. 10. — P. 3875–3882.
- Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Theory of azimuthally small-scale Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere with small but finite plasma pressure // *J. Geophys. Res.* — 2002. — Vol. 107, no. A11. — P. SMP 10–1–SMP 10–8.
- Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Spatial localization and azimuthal wave numbers of Alfvén waves generated by drift-bounce resonance in the magnetosphere // *Ann. Geophys.* — 2005. — Vol. 23. — P. 3775–3784.
- Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Giant pulsations as modes of a transverse Alfvénic resonator on the plasmopause // *Earth Planets Space*. — 2013. — Vol. 65. — P. 397–409.
- Mager P. N., Mikhailova O. S., Mager O. V. et al. Eigenmodes of the Transverse Alfvénic Resonator at the Plasmopause: A Van Allen Probes Case Study // *Geophysical Research Letters*. — 2018. — Vol. 45. — P. 10,796–10,804.
- Mann I.R., Wright A.N., Mills K.J. et al. Excitation of magnetospheric waveguide modes by magnetosheath flows // *J. Geophys. Res.* — 1999. — Vol. 104. — P. 333–354.
- Mann I. R., Wright A. N. Finite lifetimes of ideal poloidal Alfvén waves // *J. Geophys. Res.* — 1995. — Vol. 100. — P. 23677–23686.
- Mathie R.A., Mann I.R. On the solar wind control of Pc5 ULF pulsation power at mid-latitudes: Implications for MeV electron acceleration in the outer radiation belt // *J. Geophys. Res.* — 2001. — Vol. 106. — P. 29783–29796.

- Mathioudakis M., Jess D. B., Erdélyi R. Alfvén Waves in the Solar Atmosphere. From Theory to Observations // *Space Sci. Rev.* — 2013. — Vol. 175. — P. 1–27.
- Mende S. B. Observing the magnetosphere through global auroral imaging: 1. Observables // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 2016. — Vol. 121, no. 10. — P. 10,623–10,637.
- Menk F. W., Waters C. L. *Magnetoseismology: Ground-based remote sensing of the Earth's magnetosphere.* — John Wiley and Sons, 2013.
- Migliuolo S. High- $\beta$  theory of low-frequency magnetic pulsations // *Journal of Geophysical Research.* — 1983. — Vol. 88, no. A3. — P. 2065–2073.
- Mikhailova O. S., Smotrova E. E., Mager P. N. Resonant Generation of an Alfvén Wave by a Substorm Injected Electron Cloud: A Van Allen Probe Case Study // *Geophysical Research Letters.* — 2022. — Vol. 49, no. 19. — P. e2022GL100433.
- Min K., Takahashi K., Ukhorskiy A. et al. Second harmonic poloidal waves observed by Van Allen Probes in the dusk-midnight sector // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 2017. — Vol. 122, no. 3. — P. 3013–3039.
- Mingalev O.V., Golovchanskaya I.V., Maltsev Y.P. Simulation of the interchange instability in a magnetospheric substorm site // *Annales Geophysicae.* — 2006. — Vol. 24, no. 6. — P. 1685–1693.
- Mishin V. V. On the MHD instability of the Earth's magnetopause and its geophysical effects // *Planet. Space Sci.* — 1981. — Vol. 29, no. 3. — P. 359–363.
- Mishin V. V. Accelerated motions of the magnetopause as a trigger of the Kelvin-Helmholtz instability // *J. Geophys. Res.* — 1993. — Vol. 98. — P. 21365–21371.
- Miura A., Ohtani S., Tamao T. Ballooning instability and structure of diamagnetic hydromagnetic waves in a model magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1989. — Vol. 94. — P. 15231–15242.

- Mond M., Hameiri E., Hu P. N. Coupling of magnetohydrodynamic waves in inhomogeneous magnetic field configurations // *J. Geophys. Res.* — 1990. — Vol. 95, no. A1. — P. 89–95.
- Nakariakov V. M., Pilipenko V., Heilig B. et al. Magnetohydrodynamic Oscillations in the Solar Corona and Earth's Magnetosphere: Towards Consolidated Understanding // *Space Sci. Rev.* — 2016. — Vol. 200. — P. 75–203.
- Ng P. H., Patel V. L., Chen S. Drift compressional instability in the magnetosphere // *Journal of Geophysical Research* — 1984. — Vol. 89. — P. 10763–10769.
- Nishimura Y., Yang J., Pritchett P. L. et al. Statistical properties of substorm auroral onset beads/rays // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2016. — Vol. 121, no. 9. — P. 8661–8676.
- Ohtani S., Miura A., Tamao T. Coupling between Alfvén and slow magnetosonic waves in an inhomogeneous finite-beta plasma. I — Coupling equations and physical mechanism // *Planet Space Sci.* — 1989. — Vol. 37. — P. 567–577.
- Oimatsu S., Nose M., Takahashi K. et al. Van Allen Probes Observations of Drift-Bounce Resonance and Energy Transfer Between Energetic Ring Current Protons and Poloidal Pc4 Wave // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2018. — Vol. 123, no. 5. — P. 3421–3435.
- Othmer C., Glassmeier K.-H., Cramm R. Concerning field line resonances in Mercury's magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1999. — Vol. 104. — P. 10369–10378.
- Ozeke L. G., Mann I. R. Modeling the properties of high  $m$  Alfvén waves driven by the drift-bounce resonance mechanism // *J. Geophys. Res.* — 2001. — Vol. 106. — P. 15583–15597.
- Panov E. V., Sergeev V. A., Pritchett P. L. et al. Observations of kinetic ballooning/interchange instability signatures in the magnetotail // *Geophys. Res. Lett.* — 2012. — Vol. 39. — P. L08110.

- Parnowski A.S. Eigenmode analysis of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // *Ann. Geophys.* — 2007. — Vol. 83. — P. 1391–1403.
- Patel V.L., Migliuolo S. Alfvén waves and drift compressional modes in multispecies plasmas // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 1980. — Vol. 85, no. A4. — P. 1736–1742.
- Patel V. L., Ng P. H., Ludlow G. R. Drift wave instabilities in a high  $\beta$  multispecies plasma // *Journal of Geophysical Research.* — 1984. — Vol. 89, no. A10. — P. 8851–8856.
- Pilipenko V., Belakhovsky V., Murr D. et al. Modulation of total electron content by ULF Pc5 waves // *J. Geophys. Res.* — 2014. — Vol. 119. — P. 4358–4369.
- Pilipenko V., Kleimenova N., Kozyreva O. et al. Long-period magnetic activity during the May 15, 1997 storm // *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* — 2001. — Vol. 63. — P. 489–501.
- Plaschke F., Glassmeier K.-H. Properties of standing Kruskal-Schwarzschild-modes at the magnetopause // *Ann. Geophys.* — 2011. — Vol. 29. — P. 1793–1807.
- Pokhotelov O.A., Balikhin M.A., Alleyne H.S.-C.K. et al. Mirror instability with finite electron temperature effects // *J. Geophys. Res.* — 2000. — Vol. 105. — P. 2393–2402.
- Pokhotelov O. A., Pilipenko V. A., Amata E. Drift anisotropy instability of a finite-beta magnetospheric plasma // *Planet. Space Sci.* — 1985. — Vol. 33. — P. 1229–1241.
- Polyakov A.R. The structure of equidistant-frequency groups in the oscillation spectra of the dayside magnetosphere // *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics.* — 2019. — Vol. 189. — P. 44 – 51.
- Potapov A. S. ULF wave activity in high-speed streams of the solar wind: Impact on the magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 2013. — Vol. 118. — P. 6465–6477.
- Radoski H. R. Highly asymmetric MHD resonances. The guided poloidal mode // *J. Geophys. Res.* — 1967. — Vol. 72. — P. 4026–4033.

- Radoski H. R. A theory of latitude dependent geomagnetic micropulsations: the asymptotic fields // *J. Geophys. Res.* — 1974. — Vol. 79. — P. 595–613.
- Rae I.J., Mann I.R., Watt C.E.J. et al. Equator-S observations of drift mirror mode waves in the dawnside magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 2007. — Vol. 112, no. A11.
- Rae I.J., Watt C.E.J. ULF Waves above the Nightside Auroral Oval during Substorm Onset // *Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series.* — 2016. — Vol. 216. — P. 99–120.
- Rae I. J., Murphy K. R., Watt C. E. J. et al. Field line resonances as a trigger and a tracer for substorm onset // *J. Geophys. Res.* — 2014. — Vol. 119. — P. 5343–5363.
- Raines J.M., DiBraccio G.A., Cassidy T.A. et al. Plasma Sources in Planetary Magnetospheres: Mercury // *Space Sci. Rev.* — 2015. — Vol. 192. — P. 91–144.
- Rosenbluth M. N. Magnetic Trapped-Particle Modes // *Phys. Rev. Lett.* — 1981. — Vol. 46. — P. 1525–1528.
- Rubtsov A.V., Agapitov O.S., Mager P.N. et al. Drift Resonance of Compressional ULF Waves and Substorm-Injected Protons From Multipoint THEMIS Measurements // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 2018. — Vol. 123, no. 11. — P. 9406–9419.
- Rubtsov A.V., Mikhailova O.S., Mager P.N. et al. Multispacecraft Observation of the Presubstorm Long-Lasting Poloidal ULF Wave // *Geophys. Res. Lett.* — 2021. — Vol. 48, no. 23. — P. e96182.
- Russell C.T. ULF waves in the Mercury magnetosphere // *Geophys. Res. Lett.* — 1989. — Vol. 16. — P. 1253–1256.
- Saka O., Kim J. S., Sugiura M. Comparison of phase and amplitude structures of Pc 5 pulsations in the morning and afternoon sectors // *J. Geophys. Res.* — 1983. — Vol. 88, no. A2. — P. 881–888.

- Samson J.C., Wallis D.D., Hughes T.J. et al. Substorm intensifications and field line resonances in the nightside magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 1992. — Vol. 97, no. A6. — P. 8495–8518.
- Samson J. C., Cogger L. L., Pao Q. Observations of field line resonances, auroral arcs, and auroral vortex structures // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 1996. — Vol. 101, no. A8. — P. 17373–17383.
- Samson J. C., Greenwald R. A., Ruohoniemi J. M. et al. Magnetometer and radar observations of magnetohydrodynamic cavity modes in the earth's magnetosphere // *Canadian J. of Phys.* — 1991. — Vol. 69. — P. 929–937.
- Samson J. C., Harrold B. G., Ruohoniemi J. M. et al. Field line resonances associated with MHD waveguides in the magnetosphere // *Geophys. Res. Lett.* — 1992b. — Vol. 19, no. 5. — P. 441–444.
- Sarris T. E., Wright A. N., Li X. Observations and analysis of Alfvén wave phase mixing in the Earth's magnetosphere // *J. Geophys. Res.* — 2009. — Vol. 114. — P. A03218.
- Schäfer S., Glassmeier K.-H., Eriksson P. T. I. et al. Spatial and temporal characteristics of poloidal waves in the terrestrial plasmasphere: a CLUSTER case study // *Ann. Geophys.* — 2007. — Vol. 25. — P. 1011–1024.
- Schäfer S., Glassmeier K.-H., Eriksson P. T. I. et al. Spatio-temporal structure of a poloidal Alfvén wave detected by Cluster adjacent to the dayside plasmopause // *Ann. Geophys.* — 2008. — Vol. 26. — P. 1805–1817.
- Shprits Y.Y., Subbotin D.A., Meredith N.P. et al. Review of modeling of losses and sources of relativistic electrons in the outer radiation belt. II: Local acceleration and loss // *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* — 2008. — Vol. 70. — P. 1694–1713.
- Singer H. J., Hughes W. J., Russell C. T. Standing hydromagnetic waves observed by ISEE 1 and 2: Radial extent and harmonic // *J. Geophys. Res.* — 1982. — Vol. 87, no. A5. — P. 3519–3529.

- Solov'yev S.I., Baishev D.G., Barkova E.S. et al. Pi2 magnetic pulsations as response on spatio-temporal oscillations of auroral arc current system // *Geophys. Res. Lett.* — 2000. — Vol. 27. — P. 1839–1842.
- Sonnerup B.U.O., Laird M.J. On magnetospheric interchange instability // *Journal of Geophysical Research.* — 1963. — Vol. 68, no. 1. — P. 131–139
- Soto-Chavez A.R., Lanzerotti L.J., Manweiler J.W. et al. Observational evidence of the drift-mirror plasma instability in Earth's inner magnetosphere // *Physics of Plasmas.* — 2019. — Vol. 26, no. 4. — P. 042110.
- Southwood D.J. Some features of field line resonances in the magnetosphere // *Planet Space Sci.* — 1974. — Vol. 22. — P. 483–491.
- Southwood D. J. A general approach to low-frequency instability in the ring current plasma // *J. Geophys. Res.* — 1976. — Vol. 81. — P. 3340–3348.
- Southwood D. J. Low frequency pulsation generation by energetic particles // *J. Geomagn. Geoelectr., Suppl. II.* — 1980. — Vol. 32. — P. 75–88.
- Southwood D.J., Dungey J.W., Etherington R.J. Bounce resonant interactions between pulsations and trapped particles // *Planet. Space Sci.* — 1969. — Vol. 17. — P. 349–361.
- Southwood D.J., Kivelson M.G. The magnetohydrodynamic response of the magnetospheric cavity to changes in solar wind pressure // *J. Geophys. Res.* — 1990. — Vol. 95. — P. 2301–2309.
- Southwood D.J., Kivelson M.G. Mirror Instability: 1. Physical Mechanism of Linear Instability // *J. Geophys. Res.* — 1993. — Vol. 98. — P. 9181–9187.
- Southwood D. J., Saunders M. A. Curvature coupling of slow and Alfvén MHD waves in a magnetotail field configuration // *Planet. Space Sci.* — 1985. — Vol. 33. — P. 127–134.
- Sutcliffe P.R., Yumoto K. Dayside Pi 2 pulsations at low latitudes // *Geophys. Res. Lett.* — 1989. — Vol. 16, no. 8. — P. 887–890.

- Swanson D. G. Plasma Waves. — Boston : Academic, 1989.
- Tajiri M. Propagation of Hydromagnetic Waves in Collisionless Plasma. II. Kinetic Approach // *Journal of the Physical Society of Japan*. — 1967. — Vol. 22, no. 6. — P. 1482–1494.
- Takahashi K., Anderson B. J. Distribution of ULF energy ( $f < 80$  mHz) in the inner magnetosphere: A statistical analysis of AMPTE CCE magnetic field data // *J. Geophys. Res.* — 1992. — Vol. 97, no. A7. — P. 10751–10773.
- Takahashi K., Claudepierre S. G., Rankin R. et al. Van Allen Probes Observation of a Fundamental Poloidal Standing Alfvén Wave Event Related to Giant Pulsations // *J. Geophys. Res.* — 2018a. — Vol. 123.
- Takahashi K., Crabtree C., Ukhorskiy A. et al. Van Allen Probes Observations of Symmetric Stormtime Compressional ULF Waves // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2022. — Vol. 127, no. 2. — P. e2021JA030115.
- Takahashi K., Glassmeier K.-H., Angelopoulos V. et al. Multisatellite observations of a giant pulsation event // *J. Geophys. Res.* — 2011. — Vol. 116. — P. A11223.
- Takahashi K., Hartinger M.D., Vellante M. et al. Roles of Flow Braking, Plasmaspheric Virtual Resonances, and Ionospheric Currents in Producing Ground Pi2 Pulsations // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2018. — Vol. 123, no. 11. — P. 9187–9203.
- Takahashi K., Oimatsu S., Nosé M. et al. Van Allen Probes Observations of Second Harmonic Poloidal Standing Alfvén Waves // *Journal of Geophysical Research: Space Physics* — 2018b. — Vol. 123. — P. 611–637.
- Tamao T. Transmission and coupling resonance of hydromagnetic disturbances in the non-uniform Earth's magnetosphere // Science reports of the Tohoku University. Ser. 5, Geophysics. — 1965. — Vol. 17. — P. 43–72.
- Tamao T. Interaction of energetic particles with HM-waves in the magnetosphere // *Planet. Space Sci.* — 1984. — Vol. 32. — P. 1371–1386.

- Taylor J.P.H., Walker A.D.M. Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number 2. Eigenmodes of the magnetostatic and Alfvén oscillations // *J. Geophys. Res.* — 1987. — Vol. 92, no. A9. — P. 10046–10052.
- Tian M., Yeoman T.K., Lester M et al. Statistics of Pc5 pulsation events observed by SABRE // *Planet. Space Sci.* — 1991. — Vol. 39. — P. 1239–1247.
- Toffoletto F.R., Wolf R.A., Schutza A.M. Buoyancy Waves in Earth’s Nightside Magnetosphere: Normal-Mode Oscillations of Thin Filaments // *Journal of Geophysical Research: Space Physics.* — 2020. — Vol. 125, no. 1. — P. e2019JA027516.
- Ukhorskiy A. Y., Sitnov M. I., Takahashi K. et al. Radial transport of radiation belt electrons due to stormtime Pc5 waves // *Ann. Geophys.* — 2009. — Vol. 27. — P. 2173–2181.
- Vaivads A., Baumjohann W., Georgescu E. et al. Correlation studies of compressional Pc5 pulsations in space and Ps6 pulsations on the ground // *J. Geophys. Res.* — 2001. — Vol. 106. — P. 29797–29806.
- Verwichte E., Foullon C., Nakariakov V. Fast magnetoacoustic waves in curved coronal loops // *Astron. Astrophys.* — 2006. — Vol. 446(3). — P. 1139–1149.
- Vetoulis G., Chen L. Global structures of Alfvén-ballooning modes in magnetospheric plasmas // *Geoph. Res. Lett.* — 1994. — Vol. 21. — P. 2091–2094.
- Viñas A.F., Madden T.R. Shear flow-ballooning instability as a possible mechanism for hydromagnetic fluctuations // *Journal of Geophysical Research.* — 1986. — Vol. 91, no. A2. — P. 1519–1528.
- Walker A.D.M. Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number. I — Coupled magnetosonic and Alfvén waves // *J. Geophys. Res.* — 1987. — Vol. 92. — P. 10039–10045.
- Walker A.D.M. Excitation of field line resonances by MHD waves originating in the solar wind // *J. Geophys. Res.* — 2002. — Vol. 107. — P. 1481.

- Wei C., Dai L., Duan S.-P. et al. Multiple satellites observation evidence: High- $m$  poloidal ULF waves with time-varying polarization states // *Earth and Planetary Physics*. — 2019. — Vol. 3, no. 3. — P. 190–203.
- Wilson C.R., Sugiura M. Hydromagnetic interpretation of sudden commencements of magnetic storms // *J. Geophys. Res.* — 1961. — Vol. 66, no. 12. — P. 4097–4111.
- Wilson M.E., Yeoman T.K., Baddeley L.J. et al. A Statistical investigation of the invariant latitude dependence of unstable magnetospheric ion populations in relation to high  $m$  ULF wave generation // *Ann. Geophys.* — 2006. — Vol. 24. — P. 3027–3040.
- Woch J., Kremser G., Korth A. et al. Curvature-driven drift mirror instability in the magnetosphere // *Planet. Space Sci.* — 1988. — Vol. 36. — P. 383–393.
- Wright A.N. Asymptotic and time-dependent solutions of magnetic pulsations in realistic magnetic field geometries // *J. Geophys. Res.* — 1992. — Vol. 97. — P. 6439–6450.
- Wright A. N. Coupling of fast and Alfvén modes in realistic magnetospheric geometries // *J. Geophys. Res.* — 1992b. — Vol. 97. — P. 6429–6438.
- Wright D.M., Yeoman T.K., Rae I.J. et al. Ground-based and Polar spacecraft observations of a giant (Pg) pulsation and its associated source mechanism // *J. Geophys. Res.* — 2001. — Vol. 106. — P. 10837–10852.
- Yamamoto K., Nose M., Keika K. et al. Eastward Propagating Second Harmonic Poloidal Waves Triggered by Temporary Outward Gradient of Proton Phase Space Density: Van Allen Probe A Observation // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2019. — Vol. 124, no. 12. — P. 9904–9923.
- Yamamoto K., Rubtsov A., Kostarev D. et al. Direct Evidence of Drift-Compressional Wave Generation in the Earth's Magnetosphere Detected by Arase // *Geophysical Research Letters*. — 2024. — Vol. 51, no. 8. — P. e2023GL107707.
- Yeoman T. K., Orr D. Phase and spectral power of mid-latitude Pi2 pulsations — Evidence for a plasmaspheric cavity resonance // *Planet. Space Sci.* — 1989. — Vol. 37. — P. 1367–1383.

- Yeoman T.K., James M., Mager P.N. et al. SuperDARN observations of high- $m$  ULF waves with curved phase fronts and their interpretation in terms of transverse resonator theory // *J. Geophys. Res.* — 2012. — Vol. 117. — P. A06231.
- Yeoman T.K., Tian M., Lester M. et al. A study of Pc5 hydromagnetic waves with equatorward phase propagation // *Planet. Space Sci.* — 1992. — Vol. 40. — P. 797–810.
- Yeoman T.K., Wright D.M., Chapman P.J. et al. High-latitude observations of ULF waves with large azimuthal wavenumbers // *J. Geophys. Res.* — 2000. — Vol. 105. — P. 5453–5462.
- Yeoman T.K., Wright D.M., Robinson T.R. et al. High spatial and temporal resolution observations of an impulse-driven field line resonance in radar backscatter artificially generated with the Tromsø heater // *Ann. Geophys.* — 1997. — Vol. 15. — P. 634–644.
- Zhang B., Lotko W., Brambles O. et al. Magnetotail origins of auroral Alfvénic power // *J. Geophys. Res.* — 2012. — Vol. 117. — P. A09205.
- Zhu X., Kivelson M.G. Compressional ULF waves in the outer magnetosphere: 1. Statistical study // *J. Geophys. Res.* — 1991. — Vol. 96, no. A11. — P. 19451–19467.
- Zolotukhina N. A., Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Pc5 waves generated by substorm injection: a case study // *Ann. Geophys.* — 2008. — Vol. 26. — P. 2053–2059.
- Zurbuchen T.H., Raines J.M., Slavin J.A. et al. MESSENGER Observations of the Spatial Distribution of Planetary Ions Near Mercury // *Science*. — 2011. — Vol. 333. — P. 1862.